

Kalkulus I. kollokvium (2002. december 27.) [P]

1. Definíciók, tételek (6x4 pont)

- Definiáljuk kétféleképpen, mit értünk azalatt, hogy egy függvény folytonos a -ban.
- Mondja ki a szigorúan monoton folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
- Mit ért azalatt, hogy egy függvény monoton csökkenő?
- Mit ért azalatt, hogy egy függvény egy pontban differenciálható?
- Mit ért azalatt, hogy egy függvény Bolzano-Darboux tulajdonságú az $\langle a, b \rangle$ intervallumon?
- Definiálja az $\arctg(x)$ függvényt!

2. Kötelező bizonyítás (11 pont)

Bizonyítsa, hogy az $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right)$ ($c > 0$) sorozat konvergens! Mi a határértéke?

3. Esszé (20 pont)

A ∞ -divergens sorozatok. Definíció, egyenlőtlenségi tételek és műveleti szabályok.

4. Feladatok

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n(\ln(n+4) - \ln(n+2))$ (10 pont)

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ (10 pont)

c) Hol folytonos az

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x}}$$

függvény? Vizsgálja meg a jellegzetes limeszpontokat. Készítsen ábrát a vizsgálat végén. Adja meg f differenciálhányadosának képletét. (13 pont)

d) Határozza meg az

$$f(x) = \sqrt{-x^2 - 6x + 7}$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Mit lehet mondani a függvény monotonitásáról? Készítsen ábrát. Hol invertálható a függvény? Mi az inverzfüggvény képlete? (12 pont)

Jó munkát!