Mérték folytonossága

Legyen μ egy mérték (pl. Lebesgue-mérték).

Tétel Ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ mérhető halmazok egy bővülő sorozata, akkor $\mu(\lim A_n) = \mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

[Azért „folytonosság", mert $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$ olyan, mint a folytonosság sorozatos definíciója.]

Biz. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus A_{n-1})$ [legyen $A_0 := \emptyset$]

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$ [mert az $[A_n \setminus A_{n-1}]$ halmazok páronként diszjunktak + mérték def.!]

$= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$, [a sor részletösszege]

$= \lim_k \sum_{n=1}^{k} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}))$ [$= \mu(A_1) - 0 + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) =$]

$= \lim_k \mu(A_k)$

Tétel. Ha $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ szűkülő sorozat, és $\exists \nu: \mu(A_\nu)$ véges, akkor $\mu(\lim A_n) = \mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

[Itt a végességi feltétel nem hagyható el, pl. az $[n, \infty)$ intervallumok szűkülő halmazrendszert alkotnak, de $\mu[n,\infty) = \infty$, $\mu(\bigcap_n [n,\infty)) = \mu(\emptyset) = 0$.]

Biz. Mivel $\mu(A_\nu)$ véges és $n>\nu$, $A_n \subseteq A_\nu$, ezért $n>\nu$ $\mu(A_n)$ véges, és így $\mu(\bigcap_n A_n)$ is véges.
Tekintsük a $B_n = A_\nu \setminus A_n$ halmazokat, ez bővülő sorozat.
Az előző tétel szerint

$$\mu(\bigcup B_n) = \lim \mu(B_n), \text{ ebből}$$

$$\mu(\bigcup_n (A_\nu \setminus A_n)) = \lim(\mu(A_\nu) - \mu(A_n)) = \mu(A_\nu) - \lim \mu(A_n).$$

Mivel $\bigcup_n (A_\nu \setminus A_n) = \bigcup_n (A_\nu \cap A_n^c) = (\bigcup_n A_\nu) \cap (\bigcup_n A_n^c) =$
$= A_\nu \cap (\bigcap_n A_n)^c = A_\nu \setminus (\bigcap_n A_n)$,
ezért

$$\mu(A_\nu) - \mu(\bigcap_n A_n) = \mu(A_\nu) - \lim \mu(A_n),$$

~~ezzel~~ a mivel $\mu(A_\nu)$ véges,

$$\mu(\bigcap A_n) = \lim \mu(A_n).$$

— · —

A kérdéses $\bigcap A_n$, $\bigcup A_n$ halmazok mérhetőek, mert a mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.

— · —

Emlékeztetőül: $\limsup_n A_n := \{x : x \in A_n \ \infty \text{ sok } n\text{-re}\}$
$\liminf_n A_n := \{x : \exists \nu \ \forall n > \nu \ x \in A_n\}$

Ha A_n olyan halmazsorozat, hogy $\limsup A_n = \liminf A_n$, akkor ez a halmaz a $\lim A_n$; bővülő, ill. szűkülő halmazsorozatokra ez könnyen ellenőrizhetően $\bigcup_n A_n$ ill. $\bigcap_n A_n$.