①

Alapkérdés: Igaz-e, hogy az integrálás és a limeszképzés felcserélhető?

a) Igaz-e hogy integrálható fv-ek limese is integrálható?

b) Ha tudjuk, hogy integrálható fv-ek valamely sorozatának limese is integrálható, igaz-e, hogy az integrálok limese egyenlő a limes integráljával?

Riemann-integrál értelmében mindkét válasz „nem".

Legyen $f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x = r_1, r_2, \ldots r_n \\ 0 \text{ különben.} \end{cases}$ ahol (r_n) a $[0,1]$ racionális pontjainak egy sorozatba rendezése,

Nyilván $f_n(x) \to f(x) := \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ racionális,} \\ 0 \text{ kül.,} \end{cases}$

tehát f_n integrálható (pl $[0,1]$-en), de f nem.

[Sőt, (f_n) monoton növő, tehát az a) kérdés még monoton sorozatokra sem igaz.]

Legyen $g_n(x) := \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$, $0 \le x \le 1$.

Nyilván $g_n(x) \to 0$ (miért is?) ugyanakkor

$$0 = \int_0^1 (\lim g_n) \neq \lim\left(\int_0^1 g_n\right) = \lim \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^4}\,dx$$

$$= \lim \left[\operatorname{arctg} nx^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

A Lebesgue-integrál konvergenciatételei ①

(vázlatos)

I. Nemnegatív mérhető fv-ek

① Lemma. Legyen (f_n) nemnegatív mérhető fv-ek monoton növekedő sorozata, és tudjuk, hogy az $\int f_n$ egyenletesen korlátos ($\exists M\ \forall n\ \int f_n \leq M$). Ekkor a $\lim_n f_n = f$ határfv majdnem mindenütt véges.

Biz. ($\lim f_n$ létezik, mert $f_n(x)$ monoton növő, és kiterj. valós halmazzal dolgozunk!)

Legyen $H := \{x : \lim f_n(x) = \infty\}$ és

$H_n^k := \{x : f_k(x) > Mn\}$

Legyen $\varphi := \begin{cases} Mn, & \text{ha } x \in H_n^k \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$ egy lépcsős fv, $\varphi(x) \leq f_k(x)$, így a „nemneg. mérhető fv integrálja" definícióból

$$(Mn)\,\mu(H_n^k) \leq \int f_k \leq M \Rightarrow \mu(H_n^k) \leq \frac{1}{n}.$$

Világos, hogy (miért is?) rögzített n-re

$H_n^1 \subseteq H_n^2 \subseteq \ldots$ legyen $H_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} H_n^k = \{x : \lim_n f_n(x) > nM\}$

mértékfolytonosság-tétel $\Rightarrow$ $\mu(H_n) = \lim_k \mu(H_n^k) \leq \frac{1}{n}$

Világos, hogy (olvasd „miért is?")

$H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots$ és $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = H$;

a mértékfolytonosság-tételből

$0 \leq \mu(H) \leq \lim_n \frac{1}{n} = 0$, tehát H

(azok a pontok, ahol $\lim f_n$ nem véges) 0-mértékű.

(2) Lemma. Legyen $f_n(x) \geq 0$, f_n mérhető, növekvő sorozat ($f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$), és tudjuk, hogy $\lim_n f_n = f$ majdnem mindenütt végés. Ekkor $\int(\lim_n f_n) = \lim_n (\int f_n)$. [Ez az, amit szeretnénk általában is; az integrál és a limes fölcserélhető.]

Biz. A monotonitásból $f := \lim f_n = \sup f_n$; tudjuk, hogy $\sup f_n$ mérhető fv és mivel $f_n \leq f$, ezért $\int f_n \leq \int f$; nyilván $\lim(\int f_n) \leq \int f$; azt akarjuk belátni, hogy „=".

Indirekt: Tfh f_n olyan, hogy „<". Ekkor van olyan φ lépcsős fv, amelyre $\forall x$ ~~$\varphi \leq f$~~ $\varphi(x) \leq f(x)$ és

$$\lim(\int f_n) < \int \varphi < \int f \quad \left(\begin{matrix}\text{Nemneg mérhető fv.}\\ \text{integrálja def.!}\end{matrix}\right)$$

φ lépcsős, $\varphi(x) = \begin{cases} \alpha_k, & \text{ha } x \in E_k, \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $\int \varphi = \sum \alpha_k \mu(E_k)$.

Legyen $0 < \varepsilon < \min(\alpha_k)$ és $H_k := \{x : f_k(x) \geq \varphi(x) - \varepsilon\}$

Mivel (f_n) növekvő, H_n bővülő sorozat; tudjuk, hogy $f_n \nearrow f$ majdnem mindenütt és világos, hogy majdnem minden $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$.

Ebből $\forall j$: $\mu(E_j) = \mu(E_j \cap (\bigcup_n H_n)) = \mu\left(\bigcup_n [E_j \cap H_n]\right) = \lim_n \mu(E_j \cap H_n)$

(mert $E_j \cap H_n$ bővülő sorozat [j rögzített!] + mérték folytonossága).

Legyen $g_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & \text{ha } x \in H_n, \\ 0 & \text{kül.,} \end{cases}$

nyilván $g_n(x) \geq \varphi(x) - \varepsilon \quad (x \in H_n)$ és

$$\int f_n \geq \int g_n \geq \sum_j (\alpha_j - \varepsilon)\mu(E_j \cap H_n),$$

$$\lim \int f_n \geq \sum_j (\alpha_j - \varepsilon)\mu(E_j)$$

$\Rightarrow \lim \int f_n \geq \int \varphi$, ami a φ lépcsősfv. def.-nak ellentmond.

II. L-integrálható fv-ek

3 Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról

Legyen $\forall n$ f_n L-int.-ható, az (f_n) sorozat monoton nővő és $\int f_n$ egyenletesen korlátos ($\exists M\ \forall n\ \int f_n < M$). Ekkor $f := \lim\limits_n f_n$ m.m. véges, f L-int.-ható, és $\int f = \lim\limits_n \int f_n$

[Nyilván kimondható analóg tétel a csökkenő (és alulról korl.) esetre is.]

Biz. Legyen $g_n := f_n - f_1$; g_n nemneg. mérhető fv.,

$$\int g_n \leq M - \int f_1 = M'.$$

Az 1. Lemma miatt $g := \lim\limits_n (f_n - f_1)$ m.m. véges; nyilván $f = g + f_1$, f m.m. véges.

A 2. Lemma miatt $\int g = \lim\limits_n \int (f_n - f_1)$, ebből

$$\int (g + f_1) = \int f = \lim_n \int f_n.$$

(5) Beppo-Lévi tétele. Legyen $\forall k$ g_k L-integrálható és állandó előjelű, továbbá tudjuk, hogy $\sum_k (\int g_k)$ véges. Ekkor $\sum_n g_n(x)$ m.m. véges, és $\int(\sum_n g_n) = \sum_n (\int g_n)$

Biz. A szereplő sorok az „állandó előjel" miatt biztosan abszolút konvergensek (kiterj. valós!) így a végességük kérdéses.
A tétel a (3) tétel átfogalmazása: Nyilván

$f_n(x)$ mon. növő $\iff$ $g_n(x) := f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ $(\forall n)$
Alkalmazzuk a (3) tételt a részletösszeg-sorozatra.

(5) Fatou lemmája. Legyen $\forall n$ f_n L-integrálható és $f_n \to f$ majdnem mindenütt. Továbbá,

i) $\exists h$ L-integrálható fv, amelyre $\forall x$ $h(x) \leq f_n(x)$ és $\exists M$: $\int f_n \leq M$, Ekkor f is L-integrálható és
vagy
$$\int f \leq \liminf (\int f_n).$$

ii) $\exists h$ L-int.ható fv: $\forall x$ $f_n(x) \leq h(x)$ és $\exists m$: $m \leq \int f_n$. Ekkor f is L-int.ható és $\int f \geq \limsup \int f_n$

Biz. [Tehát a fv.sorozat olyan, hogy egyik oldalról majorálható a fv-el, másik oldalról az integráljaik korlátozhatók.]

(i) Legyen ~~$h_k := \inf_{n \geq k} f_n$~~ $h_k := \inf_{n \geq k} f_n$

Nyilván $h \leq h_k \leq f_k$, ezért h_k integrálható
[miért is? mert pl $h_k^+ \leq f_k^+$ és tudjuk, hogy $\int f_k^+ < \infty$ stb],
$\int h_k \leq \int f_n$ $(\forall n \geq k)$

$\Rightarrow$ $\int h_k \leq \inf_{n \geq k} \int f_n$, azaz $\int h_k$ felülről korlátos.

Nyilván (h_k) mon. növő, és
$$\lim_k h_k = \liminf f_n = f$$
(~~ugyanis~~ ahol tudjuk, hogy $\lim_k (\inf_{n\geq k} a_n) = \liminf_n a_n$, és ha $\lim a_n$ létezik, akkor $\liminf a_n = \lim a_n$).

~~Lebesgue~~ Lebesgue monoton konv. tételéből (3)
$$\lim_k (\int h_k) = \int f \quad, \text{és}$$

$$\int f = \lim_k \int h_k \leq \lim_k \inf_{n\geq k}(\int f_n) \leq \liminf_n \int f_n .$$

Az (ii) esetet megkapjuk, ha f helyébe $-f$-et írunk.

(6) Lebesgue majorált konvergenciáról szóló tétele. Legyen $\forall n$ f_n L-integrálható; $f_n \to f$ majdnem mindenütt és $\exists g$ L-integrálható fv, hogy $\forall n$ $|f_n(x)| \leq g(x)$ majdnem mindenütt. Ekkor f is L-integrálható, és $\int f = \lim_n (\int f_n)$.

Biz. f_n m.m. értelmezett és mérhető $\Rightarrow$ f is mérhető, továbbá, ~~mivel~~ $|f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq g(x)$ (m.m.), azaz, az f is L-integrálható fv.

Nyilván $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$ és
$$0 \leq \int |f_n(x) - f(x)|,$$
tehát alkalmazhatjuk a Fatou-lemmát ((ii) eset) az $|f_n - f|$ függvényre. Kapjuk, hogy
$$0 \leq \limsup \int |f_n - f| \leq \int \lim |f_n - f| = \int 0 = 0,$$
ebből $\lim \int |f_n - f| = 0$, azaz $\lim \int f_n = \int f$.

— o —

Ebben az anyagban végig az integrálás tartománya lehet $\mathbb{R}$, vagy valamely mérhető részhalmaza is.