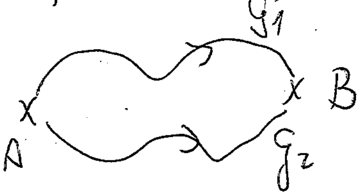
A Cauchy-féle integráltétel egy lehetséges bizonyításának vázlata

A szereplő függvények $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusúak; a görbék szakaszonként simák.

1. Legyen a g görbe a-ból b-be vezető; $f: D \to \mathbb{C}$ folytonos fv, ahol D nyílt összefüggő tartomány; az $\int_g f(z)\,dz$ integrált útfüggetlennek nevezem, ha értéke csak a-tól, b-től függ, a görbétől nem, azaz minden görbére ugyanaz. (Nyilván $a, b \in D$, $g \subseteq D$.)*

2. Tétel. A fenti integrál útfüggetlen $\iff$ ~~HA~~ minden zárt α görbére $\oint_\alpha f(z)\,dz = 0$ (nyilván $\alpha \subseteq D$)

Biz. nyilvánvaló, hiszen



$\alpha = g_1 \cup (-g_2)$ egy zárt görbe.

3. Tétel. Ha a D nyílt tartományon f-nek van primitív függvénye, akkor D-n az $\int_g f(z)\,dz$ útfüggetlen.
[Primitív fv.: olyan $F: D \to \mathbb{C}$, amelyre $\forall z \in D$ $F'(z) = f(z)$.]

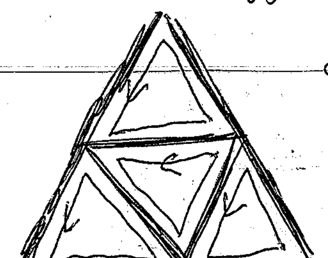
Biz. Legyen a g görbe $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, nyilván $z(\alpha) = a$ és $z(\beta) = b$ a görbe végpontjai. Az integrál

$$\int_g f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(z(t))\,z'(t)\,dt =$$

$$\left[F(z(t))\right]_\alpha^\beta = F(b) - F(a)$$ a görbe alakjától független.

4. Tétel (Goursat lemma). Legyen f a D (összefüggő nyílt) tartományon holomorf és tegyük fel, hogy a H háromszöglap kerületével együtt D-ben van. Ekkor a H háromszög K kerületén
$\int_K f(z)dz = 0$.

Biz. Tfh nem, azaz $\left|\int_K f(z)dz\right| = c > 0$. Osszuk a H háromszöget négybe a középvonalaival. Világos, hogy



a nagy Δ kerületén vett integrál egyenlő a négy kis Δ kerületén vett integrálok összegével (mert a középvonalakon vett integrálok kiesnek (oda-vissza integrálunk)), tehát van olyan kis Δ, legyen ez H_1, amelyre a K_1 kerületen vett integrál $\left|\int_{K_1} f(z)dz\right| \ge \frac{c}{4}$. Ezt az eljárást ismételgetve, kapjuk H_n háromszögek olyan sorozatát, amelyekre

$$\left|\int_{K_n} f(z)dz\right| \ge \frac{c}{4^n}.$$

A H_n háromszögek egymásba skatulyázott zárt halmazok, közös pontjuk legyen 'a'. Vegyük az a-nak egy olyan kis környezetét, amelyben $f(z) = f'(a)(z-a) + \omega(z)(z-a)$, $|\omega(z)| < \varepsilon$. Van olyan ν, hogy $\cancel{H_\nu}$ H_ν benne van ebben a környezetben:

$$\left|\int_{K_\nu} f(z)dz\right| \le \left|\int_{K_\nu} f'(a)(z-a)dz\right| + \left|\int_{K_\nu} \omega(z)(z-a)dz\right|.$$

az első integrál 0, mert van primitív fv $\left(f'(a)\cdot\frac{1}{2}(z-a)^2\right)$ és K_ν egy zárt görbe (1. 2,3 Tételek). A második integrált becsüljük. ~~az~~ a H_ν háromszögön nyilván

$$|z-a| \le |K_\nu|,$$ ahol $|K_\nu|$ a kerület hossza,

nyilván $|K_\nu| = \frac{|K|}{2^\nu}$, ahol $|K|$ az eredeti kerület hossza.

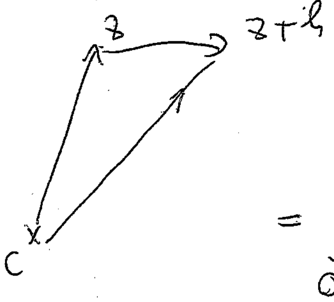
Az integrálás út hossza is $|K_\nu| = \frac{|K|}{2^\nu}$, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{c}{4^\nu} \le \left|\int_{K_\nu} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\, |K_\nu| \cdot |K_\nu| = \varepsilon \frac{|K|}{4^\nu}, \text{ amiből}$$

$$\frac{c}{|K|} \le \varepsilon, \quad \text{ami ellentmondás.}$$

5. Tétel. Legyen $f: D \to \mathbb{C}$ holomorf, és D összefüggő, nyílt, csillagszerű tartomány ($\exists c \in D$, $\forall z \in D$ a $[c, z]$ egyenesszakasz $\subseteq D$). Ekkor f-nek van D-n primitív függvénye.

Biz. Legyen $F(z) = \int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$, ahol $[c, z]$ a c-ből z-be vezető egyenesszakasz.



Ekkor

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta)\,d\zeta = \quad \text{(az egyenest paraméterezve)}$$

$$= \int_0^1 f(z+th) \cdot h\,dt = 1 \cdot f(z + \xi h) \cdot h,$$

ahol $\xi \in [0,1]$ (ez az integrálszámítás középérték tétele); tehát

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z+\xi h);$$ ha $h \to 0$, $f(z+\xi h) \to f(z)$ (mert f folytonos). Kész.

Középérték-tétel nélkül: $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta =$

$$= \int_{[z,z+h]} \big(f(z) + \omega(\zeta)\big)\,d\zeta = \oplus$$ ahol $|\omega(\zeta)| < \varepsilon$, ha h kicsi (folytonosság)

$$\oplus = h \cdot f(z) + \int_{[z,z+h]} \omega(\zeta)\,d\zeta, \text{ ebből}$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) + \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \omega(\zeta)\,d\zeta,$$

ıff $\left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} \omega(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \varepsilon \cdot |h| \leq \varepsilon$.

6. Tétel: Cauchy-féle integráltétel.
Legyen $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf a D összefüggő, nyílt, csillagszerű tartományon. Ekkor bármely (szakaszonként sima) γ egyszerű zárt görbére, ami (belsejével együtt) D-ben van,

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Biz. következik 3, 5-ből.