A komplex és valós fvtan elemei alkalmazásokkal
tematika (2008–2009 tavasz)
azaz erről volt szó előadáson

1. Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alak. Tartományok, összefüggőség, nyíltság, körlánc tétel. Konvex és csillagszerű tartományok.
2. Komplex függvények folytonossága és differenciálhatósága. Differenciálható függvények által létesített leképezések tulajdonságai.
3. A Cauchy–Riemann-féle egyenletek(*). Összetett és inverzfüggvények differenciálása. Harmonikus függvények, harmonikus társ.
4. Komplex hatványsor, konvergenciasugár, abszolút és egyenletes konvergencia. Komplex hatványsor tagonként differenciálható(*).
5. Az e^z, $\log z$, $\sin z$, $\cos z$ komplex függvények definíciója, tulajdonságaik(*). Euler-féle formulák
6. A komplex vonalintegrál definíciója és tulajdonságai: linearitás, becslések.
7. Goursat lemmája. Cauchy-féle integráltétel(*) és Riemann-féle kiterjesztése.
8. Holomorf függvény Taylor-sorba fejtése(*). Holomorf függvény akárhányszor differenciálható. Cauchy-féle integrálformulák és egyenlőtlenségek
9. Liouville tétele, Morera tétele, az algebra alaptétele(*). Holomorf függvény zérushelyei izoláltak
10. Gyűrűszerű tartományon holomorf függvény Laurent-sorba fejtése(*)
11. Izolált szinguláris helyek. A pólusszingularitás és jellemzése(*). A lényeges szingularitás. A Casorati–Weierstrass tétel.
12. A residuum kiszámítása egyszerűbb esetekben. A residuum-tétel(*).
13. Az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ és az $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ integrálok
14. Halmazsorozatok. Halmazgyűrű és halmazalgebra, σ-gyűrű és -algebra. Mérték fogalma, mérték teljessége. Külső mérték fogalma és tulajdonságai. Indukált mérték, Indukált külső mérték.
15. Lebesgue-mérték és elemi tulajdonságai(*). A Lebesgue-mérték folytonossága(*)
16. A Cantor-féle halmaz(*). A 0 mértékű halmazok jellemzése, tulajdonságai(*)
17. A monoton függvények mm. folytonosak(*). Monoton fúggvények és korlátos változású függvények
18. Mérhető függvények, tulajdonságaik, összeg, szorzat, alsó, felső burkolók, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$, $\lim f_n$ mérhetősége(*) Mérhető függvények előállítása lépcsősfüggvények sorozata határértékeként(*)
19. Lépcsősfüggvények és nemnegatív mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai(*). A Lebesgue-integrál fogalma. Az integrál alaptulajdonságai (linearitás, halmaz szerinti additivitás, becslések).
20. Konvergenciatételek: Lebesgue tétele a monoton konvergenciáról. Beppo Lévi tétele, Lebesgue tétele a majorált konvergenciáról(*), Fatou lemmája
21. Lebesgue-integrál és Riemann integrál kapcsolata(*).
22. Bessel egyenlőtlenség. Az általános (ONR szerinti) Fourier sor részletösszegeinek minimumtulajdonsága(*). Riesz–Fischer tétel L^2-ben(*). Parseval-formula.
23. Norma és skaláris szorzat. Banach tér, Hilbert tér. Lineáris függetlenség, ortonormált rendszerek,

teljesség. Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenség(*)

24. A trigonometrikus rendszer ortogonalitása és teljessége(*). A Fourier-sor
25. A Fourier-sor konvergenciája(*). Alkalmazások.
26. Fourier-transzformáció, Laplace-transzformáció.

Vizsgán smerni kell a definíciókat, a fogalmak alapvető tulajdonságait, kapcsolataikat, a tételeket; A (*)-gal jelölt tételek bizonyításait is.

2009. 04. 24. Németh Zoltán