

KALKULUS I. TÉTELSOR
levelező prog. mat. (2005–2006.)

Kötelező bizonyítások

1. Bizonyítsa be, hogy egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet!
2. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a q^n ($|q| < 1$) sorozat konvergenciájáról szóló tételt!
3. Fogalmazza meg és bizonyítsa be az $\sqrt[n]{c}$ ($c > 0$) és az $\sqrt[n]{n}$ sorozatok konvergenciájáról szóló tételt!
4. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a $\frac{a^n}{n!}$ ($a \in \mathbb{R}$) sorozat konvergenciájáról szóló tételt!
5. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a $\frac{n}{2^n}$ sorozat konvergenciájáról szóló tételt!
6. Bizonyítsa be, hogy minden konvergens sorozat korlátos!
7. Bizonyítsa be, hogy az $(1 + \frac{1}{n})^n$ és $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ sorozatok konvergensek és határértékük megegyezik!
8. Bizonyítsa be, hogy ha $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, akkor $a_n b_n \rightarrow ab$!
9. Bizonyítsa be, hogy ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens is!
10. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a rendőr-elvet!
11. Bizonyítsa be, hogy ha $a_n \rightarrow a$ és $b_n \rightarrow b$, valamint $\exists \nu : \forall n > \nu : a_n \leq b_n$, akkor $a \leq b$! Mit állíthatunk, ha $\forall n > \nu : a_n < b_n$?
12. Bizonyítsa be, hogy az $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$ ($c > 0$) sorozat konvergens és a határértéke \sqrt{c} !
13. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Bolzano–Weierstrass tételt!
14. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
15. Bizonyítsa be, hogy a (lokális) folytonosság „ $\varepsilon - \delta$ -s” és „sorozatos” definíciója ekvivalens!
16. Fogalmazza meg és bizonyítsa be az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!
17. Fogalmazza meg és bizonyítsa be két folytonos függvény hányadosának folytonosságáról szóló tételt!
18. Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos egy intervallumon, akkor ott Bolzano–Darboux tulajdonságú is!
19. Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos egy korlátos zárt intervallumon, akkor ott korlátos is!
20. Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény folytonos egy korlátos zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen is folytonos!
21. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a nyílt intervallumon folytonos és szigorúan monoton függvény inverzéről szóló tételt!
22. Bizonyítsa be, hogy az $f(x) \rightarrow l$ ($x \rightarrow a$) állítás „ $\varepsilon - \delta$ -s” és „sorozatos” definíciói ekvivalensek!
23. Bizonyítsa be, hogy $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, ha $x \rightarrow 0$!
24. Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény egy pontban differenciálható, akkor ott folytonos is!

25. Bizonyítsa be, hogy ha az f differenciálható a -ban és g differenciálható $f(a)$ -ban, akkor $g(f)$ is differenciálható a -ban! Adja meg $g(f)$ összetett függvény a -beli differenciálhányadosát!
26. Fogalmazza meg és bizonyítsa be az adott pontban differenciálható függvények szorzatának differenciálhatóságáról szóló tételt!
27. Határozza meg az x^α függvény differenciálhányados függvényét az $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ és a $0 < x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetekben!
28. Határozza meg a e^x és az $\ln x$ függvények differenciálhányados-függvényét!

Tételek, definíciók

Mindenképpen ide tartoznak azok a tételek, definíciók is, amelyek az előző részben már szerepeltek. Egy pontban esetleg több definíciót, tételt is összefoglaltunk, ezek mindegyikét tudni kell! A definíciókat, tételket pontosan kell kimondani (amelyek feltételekkel stb.), de nem kellene motivációs részek, példák és ellenpéldák, indoklások, bizonyítások! (T: tétel, D: definíció)

1. Korlátos számhalmaz supremuma és infimuma (D)
2. Függvény inverze (D)
3. Függvény monotonitása (D)
4. Pontonkénti műveletek függvényekkel (D)
5. Függvény szélsőértéke (D)
6. Monoton számsorozat (D)
7. Korlátos számsorozat (D)
8. Sorozat határértéke (D)
9. Konvergencia és korlátosság kapcsolata (T)
10. Konvergencia és monotonitás kapcsolata (T)
11. Részsorozat fogalma (D)
12. Fésűs egyesítés fogalma (D)
13. Konvergens sorozat részsorozatai (T)
14. Konvergens sorozatokkal végezhető műveletek (T) ($\lambda \cdot a_n$, $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$)
15. Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségi tételek (T) (ha $\exists \nu : \forall n > \nu : a_n \geq b_n$; ha $a > b$; rendőr-elv)
16. A ∞ -divergens sorozatok (D)
17. A ∞ -divergens sorozatokkal végezhető műveletek (T) ($\lambda \cdot a_n$, $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$, $\frac{1}{a_n}$)
18. Sorozat torlódási pontja (D)
19. Korlátos sorozat $\overline{\lim}$ -ja és $\underline{\lim}$ -ja (D)
20. Az f függvény folytonos a -ban (D) (mindkét definíció!)
21. Az f függvény határértéke a -ban l (D) (mindkét definíció!)
22. Az f függvény határértéke $\pm\infty$ -ben l (D) (mindkét definíció!)

23. Az f függvény határértéke a -ban $\pm\infty$ (D) (mindkét definíció!)
24. Az f függvény határértéke $\pm\infty$ -ben $\pm\infty$ (D) (mindkét definíció!)
25. Az f függvény féloldali határértéke a -ban l (D) (mindkét definíció!)
26. Az f függvény féloldali határértéke a -ban $\pm\infty$ (D) (mindkét definíció!)
27. Adott pontban folytonos függvényekkel végezhető műveletek (T) ($\lambda \cdot f, f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$)
28. Folytonos függvények összetétele (T)
29. Intervallumon folytonos és szigorúan monoton függvény inverze (T)
30. Intervallumon folytonos függvény (D)
31. Intervallumon egyenletesen folytonos függvény (D)
32. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény tulajdonságai (T) (korlátos; felveszi szélsőértékeit; első és utolsó elérés; egyenletesen folytonos)
33. Függvény szakadási helyeinek osztályozása (D)
34. Elemi függvény fogalma (D)
35. A hatvány és gyökfüggvények (D)
36. Az exponenciális és logaritmus függvények (D)
37. A trigonometrikus függvények és inverzeik (D)
38. A pontbeli differenciálhatóság (D)
39. A pontbeli differenciálhatóság és a függvénygörbe érintője (T)
40. Adott pontban differenciálható függvényekkel végezhető műveletek (T) ($\lambda \cdot f, f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$)
41. Az f és g differenciálható függvények összetételének adott pontbeli differenciálhatósága (T)
42. Invertálható függvény inverzének adott pontbeli differenciálhatósága (T)
43. A hatvány- és gyökfüggvények differenciálhányados függvénye (T)
44. Az exponenciális és logaritmus függvények differenciálhányados függvénye (T)