Az implicitfüggvény-tétel
2. sillabusz a Többváltozós függvények kurzushoz

Mi az, hogy „sillabusz”? Ez egy olyan iromány, ami segédanyagnak készült. Vázlatos, pontatlan, (szándékoltan) hiányos. Segíti a tanulást, vázlatot, ötleteket ad. Ugyanakkor, egy része a törzsanyagon túlmutat(hat).

Példák implicit alakban adott függvényre

Gyakori feladat, hogy egy függvényről tudjuk, hogy valamely egyenletnek eleget tesz, ám az egyenletből nem lehet vagy nem kényelmes kifejezni a függvény explicit képletét. Ilyenkor implicit alakban adott függvényről beszélünk.

1. Keresünk egy olyan $y = y(x)$ egyváltozós függvényt (ha úgy tetszik, a grafikonját, ami egy síkbeli görbedarab), amelyre igaz, hogy mindenütt $x^2 + y^2 = 25$. (Titokban tudjuk persze, hogy ez egy kör.)

Például az $A = (3, 4)$ pont rajta van a körön; keressünk rajta áthaladó megoldást (olyan függvényt, amelyre $y(3) = 4$). Ilyen nyilván van, legalábbis az $a = 3$ pont egy kis környezetében az $y = \sqrt{1 - x^2}$ megfelelő lehet. Hasonlóan, a $B = (4, -3)$ pont is rajta van a körön; és az $a = 4$ pont egy kis környezetében az $y = -\sqrt{1 - x^2}$ megfelelő lehet (hiszen ő egy szép síma függvény és $y(4) = -3$). A $C = (5, 0)$ ponton át azonban nem találunk megoldást, mert a C pont bármely kis környezetében a körív nem függvénygrafikon. Még ha önkényesen ki is választanánk mondjuk a felső ívét, a kapott darab nem lenne „szép síma”, t.i. nem lenne differenciálható. De mi lenne akkor, ha nem tudtam volna kifejezni az y-t, vagy ha a képlet túl bonyolult lenne?

Kicsit általánosabban, legyen $F(x, y) = 0$ a kielégítendő egyenlet és legyen $A = (a, b)$ olyan, hogy $F(a, b) = 0$. A kérdés az, hogy található-e olyan $y = y(x)$ *síma* függvény, amely az a pont egy kis környezetében értelmezhető, $y(a) = b$ és $F(x, y(x)) = 0$. (más szavakkal, az F kétváltozós függvény 0-szintvonala csakugyan vonal-e, és főleg, síma függvény görbéje-e, legalábbis lokálisan az a körül?

Ha van ilyen $y(x)$ függvény, akkor legyen

$$\varphi(x) := F(x, y(x))$$

egy egyváltozós függvény, és tudjuk, hogy $\varphi(x) \equiv 0$, hiszen pont ilyen y-t keresünk. A (többváltozós) összetett függvény differenciálási szabálya szerint (feltéve, hogy a szereplő függvények símák, azaz elegendő sokszor differenciálhatóak)

$$(1) \qquad \varphi'(x) := F'_x(x, y(x)) \cdot 1 + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0, \quad \text{ebből} \quad y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

feltéve, hogy $F'_y(x, y) \neq 0$.

A fenti példában $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ és $F'_y(x, y) = 2y$. A C pontban tehát $F'_y(C) = 0$, azaz az (1) formula nem működik (itt „baj” van, ezt tudtuk). Ám mondjuk az A pontban $F'_y(A) \neq 0$, és ha tudjuk, hogy a keresett függvény létezik, akkor a deriváltja könnyen kiszámolható: az (1) szerint

$$y'(3) = -\frac{F'_x(A)}{F'_y(A)} = -\frac{2x}{2y}(A) = -\frac{3}{4}$$

tehát megkaptuk a deriváltat *anélkül, hogy az $y(x)$ függvény explicit képletét meg kellett volna határoznunk*. Természetesen a derivált ismeretében a függvény tovább vizsgálható (monotonitás, szélsőérték, ...). (Órán is csináltunk ilyen vizsgálatot, pl. B-N-N példatár 277.)

2. Legyen most az implicit egyenlet $F(x, y, z) = 0$, ami a $z = z(x, y)$ kétváltozós függvényt határozza meg. Nyilván akkor értelmes a dolog, ha találok olyan $A = (a, b, c)$ pontot, amelyre $F(A) = 0$, tehát az egyenlet kielégíthető; ekkor az (a, b) kétdimenziós (xy-síkbeli) pont egy környezetében kereshetek megoldást.

Az előzőhöz hasonlóan, legyen

$$\varphi(x, y) := F(x, y, z(x, y))$$

egy kétváltozós függvény. Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$\varphi'_x(x) := F'_x(x, y, z(x, y)) \cdot 1 + F'_y(x, y, z(x, y)) \cdot 0 + F'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y) = 0,$$

ebből

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \text{és hasonlóan} \quad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \tag{2}$$

feltéve, hogy $F'_z(x, y, z) \neq 0$ (és most is feltéve, hogy a szereplő függvények símák)

Például a $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4xz + 2 = 0$ egyenlet egy kétköpenyű hiperboloidot határoz meg; keressük a legalacsonyabb pontját. Ki tudnánk ugyan fejezni a $z = z(x, y)$ függvényt, de a formula nehézkes. Ugyanakkor a hiperboloid legalacsonyabb pontja ott lesz, ahol $z(x, y)$ parciális deriváltjai 0-k, (2) alapján

$$6x + 4y - 4z = 0, \quad 4y + 4z = 0,$$

ez az egyenletrendszer könnyen megoldható.

3. Legyen most egy implicit egyenletrendszerünk:

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0.$$

A háromváltozós függvények 0-nívói felületek, a két felület metszete egy görbe. Ezt a görbét keressük, nyilván paraméteres alakban. Tegyük fel, hogy az x koordináta lehet a paraméter; tehát az $x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ függvényeket keressük. Szokásos módszerünkkel legyenek

$$\varphi(t) := F(t, y(t), z(t)), \quad \psi(t) := F(t, y(t), z(t))$$

egyváltozós függvények. Tudjuk, hogy $\varphi(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv 0$, az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$\varphi'(t) := F'_x(t, y(t), z(t)) \cdot 1 + F'_y(t, y(t), z(t)) \cdot y'(t) + F'_z(t, y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0,$$

$$\psi'(t) := G'_x(t, y(t), z(t)) \cdot 1 + G'_y(t, y(t), z(t)) \cdot y'(t) + G'_z(t, y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0.$$

Ezt az egyenletrendszert az $y'(t)$, $z'(t)$ deriváltakra megoldva (az elsőt szorozzuk G'_z-szel, a másodikat F'_z-vel, kivonjuk stb ...) kapjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x G'_z - F'_z G'_x}{F'_y G'_z - F'_z G'_y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{és} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},$$

tehát a deriváltak Jacobi-determinánsok hányadosaként adódnak (feltéve, hogy a nevezőbe nem 0 kerül).

4. Tekintsük azt az esetet, amikor két implicit (négyváltozós) egyenlet két kétváltozós függvényt határoz meg:

$$F(x,y,u,v)=0, \quad G(x,y,u,v)=0$$

és az $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ függvényeket keressük. (Továbbra is föltesszük, hogy a szereplő függvények símák és hogy legalább egy pont (az $A=(x_0,y_0,u_0,v_0)$) kielégíti a feltételeket.) Szokásos módszerünkkel legyenek

$$\varphi(x,y):=F(x,y,u(x,y),v(x,y)), \quad \psi(x,y):=G(x,y,u(x,y),v(x,y))$$

kétváltozós függvények, melyekről tudjuk, hogy $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x,y)\equiv 0$. Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint például az x szerinti parciális deriváltakra

$$F'_u u'_x + F'_v v'_x = -F'_x\,, \quad G'_u u'_x + G'_v v'_x = -G'_x\,,$$

amiből (lin. egyenletrsz.!)

$$u'_x = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \quad \text{és} \quad v'_x = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\,,$$

az y szerinti deriváltak hasonlóan számolhatók.

Kimondjuk a tételeket

A fentiek alapján több tétel is kimondható implicit alakban adott függvényekre, függvényrendszerekre. Ezek közös dallama az alábbi lehet.

Van elegendő egyenletünk, ezek határozzák meg a keresett függvényeket: n darab egyenként k változós függvény meghatározásához k darab $(n+k)$-változós egyenlet kell. A szereplő függvények símák; legalább egy pont az összes feltételt kielégíti. Ekkor annak a pontnak egy kis környezetében egyértelműen léteznek a keresett függvények, ők is símák, és deriváltjaik „egyszerűen” számolhatók deriváltak vagy legrosszabb esetben Jacobi-determinánsok hányadosaként — feltéve, hogy a nevezőbe kerülő kifejezés nem 0.

(Vegyük észre, hogy ezek „lokális” tételek.)

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $F(x,y)$ függvény mindkét parciális deriváltja létezik és folytonos az $A=(a,b)$ pont egy környezetében, $F(a,b)=0$, és $F'_y(a,b)\neq 0$. Ekkor van olyan $\delta>0$, hogy minden x, $|x-a|<\delta$ esetén egyértelműen létezik olyan $y(x)$ érték, amelyre $F(x,y(x))\equiv 0$, $y(a)=b$ és az így definiált $y(x)$ (egyváltozós) függvény az a pontban differenciálható, és*

$$y'(a) = -\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}\,.$$

2. Tétel. *Legyen* $F : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *típusú, azaz* $(k+1)$*-változós függvény. Tegyük fel, hogy minden parciális deriváltja létezik és folytonos az* $A = (\underline{a}, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$ *pont egy környezetében,* $F(\underline{a}, b) = 0$*, és* $F'_y(\underline{a}, b) \neq 0$*. Ekkor van olyan* $\delta > 0$*, hogy minden* $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$*,* $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ *esetén egyértelműen létezik olyan* $y(\underline{x})$ *érték, amelyre* $F(\underline{x}, y(\underline{x})) \equiv 0$*,* $y(\underline{a}) = b$ *és az így definiált* $y : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *típusú, azaz* k*-változós függvény az* $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ *pontban minden változója szerint differenciálható, és*

$$y'_{x_i}(\underline{a}) = -\frac{F'_{x_i}(\underline{a}, b)}{F'_y(\underline{a}, b)} . \tag{3}$$

3. Tétel. *Legyenek* $F_1, \ldots, F_n$ $\mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ *típusú, azaz* $(k+n)$*-változós függvények. Tegyük fel, hogy mindegyiknek minden parciális deriváltja létezik és folytonos az* $A = (\underline{a}, \underline{b}) \in \mathbb{R}^{k+n}$ *pont egy környezetében (itt és a továbbiakban legyen* $\underline{a}, \underline{x} \in \mathbb{R}^k$*,* $\underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*, stb.),* $F(\underline{a}, \underline{b}) = 0$*, és*

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{(y_1, \ldots, y_n)} (\underline{a}, \underline{b}) \neq 0.$$

Ekkor van olyan $\delta > 0$*, hogy minden* $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$*,* $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ *esetén egyértelműen léteznek olyan* $y_j(\underline{x})$ *értékek (azaz* $\underline{y}(\underline{x})$ *vektorok), amelyekre* $F(\underline{x}, \underline{y}(\underline{x})) \equiv 0$*,* $\underline{y}(\underline{a}) = \underline{b}$ *és az így definiált* y_j : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *típus'u, azaz* k*-változós függvények mindegyike az* $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ *pontban minden változója szerint differenciálható, és*

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\underline{a}) = -\frac{\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, x_i \ldots y_n)}}{\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}} ,$$

ahol a számlálóban levő Jacobi-determinánsban az y_j *helyébe ker"ult az* x_i*.*

Bizonyítani mindig öröm

Mindenekelőtt. Az látszik, hogy a formulák elég bonyolultak és hosszúak tudnak lenni. Egy következetesen végigvitt vektorjelölés sokat tömörítene ezen. Igazából és alapvetően a kérdéskör erősen lineáris algebrai gyökerű. Nagyon pongyolán fogalmazva, arról van szó, hogy egy „nemelfajuló” differenciálható függvény differenciálhatósága éppen azt jelenti hogy a leképezés a két vektortér között „kicsiben lineáris” (és mátrixa a parciális deriváltakból áll). A lineáris leképezésekkel pedig mindenfélét lehet csinálni ...

Persze azért nézzünk egy formális bizonyítást. A 2. tételt fogjuk bizonyítani.

Bizonyítás. Tehát $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ k-dimenziós pontok, az $A = (\underline{a}, b)$ pedig $(k+1)$-dimenziós – úgy képzelhetjük el, hogy a $(k+1)$-edik koordináták a k-dimenziós tér „fölött” vannak. Ebben a $(k+1)$-dimenziós térben „henger”-környezeteket fogunk használni: mondjuk az $(\underline{a}, b)$ pont egy δ-környezete álljon mindazon $(\underline{x}, y)$ pontokból, amelyekre $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ és $|y - b| < \delta$.

Vegyük észre, hogy az F függvény parciális deriváltjai folytonosak, tehát F differenciálható, így folytonos is. Az $F'_y(A)$ nem 0, legyen mondjuk $F'_y(A) > 0$.

Mivel F'_y folytonos, van az A pontnak olyan $\mathcal{H}_1$ (henger)környezete, amelyben mindenütt $F'_y(\underline{x}, y) > 0$ (fokozatosváltozás-tulajdonság). Tekintsük a $g(y) := F(\underline{a}, y)$ egyváltozós függvényt, $g'(y) := F'_y(\underline{a}, y) > 0$, tehát g szigorúan növő. Tudjuk, hogy $g(b) = 0$, így léteznek $c < b < d$ értékek, amelyekre $g(c) < 0 < g(d)$. Azt kaptuk tehát, hogy az A pont alatt és fölött vannak olyan $C := (\underline{a}, c)$ és $D := (\underline{a}, d)$ pontok, amelyekre $F(C) < 0 < F(D)$.

Mivel F is folytonos, a C és a D pontoknak is vannak olyan $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ környezetei, amelyekben mindenütt $F(\underline{x}, y) < 0$, illetve > 0.

Legyen most δ a három környezet sugarának minimuma, és tekintsük az alapsíkon (az $\underline{x}$-síkon) az $\underline{a}$ pont δ-környezetét és az alatta-fölötte levő pontokat. Egy pillanatra rögzítsük az $\underline{x} : d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ értéket 'es tekintsük a $h(y) := F(\underline{x}, y)$ egyváltozós függvényt. Az $\underline{x}$ alatt van olyan pont (a C környezetében), ahol $h(y) < 0$, hasonlóan, az $\underline{x}$ fölött van olyan pont (a D környezetében), ahol $h(y) > 0$. Mivel h is szigorúan növő (mert deriváltja pozitív), egyértelműen létezik olyan y érték, amelyre $h(y) = F(\underline{x}, y) = 0$. Ezzel definiáltuk az $\underline{a}$ egy környezetében egyértelműen létező, az $F(\underline{x}, y(\underline{x})) = 0$ implicit feltételt kielégítő függvényt.

Hátravan még a deriváltról szóló állítás. Legyen $\underline{e}_i$ egy x_i irányú egységvektor. Legyen $y(\underline{a} + h\underline{e}_i) =: \eta$ (tudjuk, hogy $F(\underline{a} + h\underline{e}_i, \eta) = 0$). Az F függvény differenciálható, a definíciót felírva az $(\underline{a}, b)$ és az $(\underline{a} + h\underline{e}_i, \eta)$ pontokra, kapjuk, hogy

$$0 = F(\underline{a} + h\underline{e}_i, \eta) - F(\underline{a}, b) = 0 + \cdots + F'_{x_i}(\underline{a}, b) \cdot h + 0 \cdots + F'_y(\underline{a}, b) \cdot (\eta - b) + \omega_1 \cdot h + \omega_2 \cdot (\eta - b)\,,$$

ebből

$$\frac{y(\underline{a} + h\underline{e}_i) - y(\underline{a})}{h} = \frac{\eta - b}{h} = -\frac{F'_{x_i}(\underline{a}, b) + \omega_1}{F'_y(\underline{a}, b) + \omega_2} \to -\frac{F'_{x_i}(\underline{a}, b)}{F'_y(\underline{a}, b)}, \quad (h \to 0),$$

hiszen ha $h \to 0$, akkor $\omega_1, \omega_2 \to 0$ és a nevezőbe sem kerül 0, mert $F'_y > 0$ és ω kicsi.

Végül, vegyük észre, hogy a parciális derivált (3) formulája nyilvan érvényes az egész környezetben; ezek szerint $y(\underline{x})$ parciális deriváltjai folytonosak, tehát y (totálisan is) differenciálható.

Ezzel a bizonyítás kész.