Hatvani László és Pintér Lajos

Komplex függvénytani gyakorlatok

József Attila Tudományegyetem
Bolyai Intézet
1995

I. KOMPLEX SZÁMOK

1. Mutassuk meg, hogy

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Mi ezen összefüggés geometriai jelentése?

2. Mutassuk meg, hogy ha $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, akkor

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

3. Legyen adva egy paralelogramma z_1, z_2, z_3 csúcsa. Határozzuk meg a z_2-vel szemben fekvő z_4 csúcsot!

4. A páronként különböző z_1, z_2, z_3 pontok milyen feltételek mellett esnek egy egyenesre?

5. Tegyük fel, hogy a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontok az origón átmenő valamely egyenes ugyanazon az oldalán vannak (nem mind az egyenesen). Bizonyítsuk be, hogy akkor

$$z_1+z_2+\ldots+z_n\neq 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

6*. Bizonyítsuk be, hogy ha $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$, akkor az origón áthaladó bármely egyenes vagy szétválasztja a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontokat, vagy mindegyik pont az egyenesen fekszik.

7*. Bizonyítsuk be, hogy ha a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontokba rendre $m_1, m_2, \ldots m_n$ tömeget helyezünk el, akkor a pontrendszer súlypontján áthaladó bármely egyenes vagy szétválasztja a $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontokat, vagy mindegyik pont az egyenesen fekszik.

8. Hány különböző értéke van:

a) $\left(\sqrt[3]{i}\right)^5$;

b) $\left(\sqrt[4]{i}\right)^6$.

9*. Legyen $\underline{n}$ és $\underline{m}$ természetes szám. Hány különböző értéke van $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$-nek? Milyen feltételek esetén egyeznek meg $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ különböző értékei $\sqrt[n]{z^m}$ különböző értékeivel?

10. A komplex sík mely pontjait jellemzik a következő relációk:

a) $a<\mathrm{Re}\,z<b$; b) $\alpha<\arg z<\beta$; c) $|z-z_0|=R$;

d) $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$; e) $|z - z_1| + |z - z_2| = k$; f) $0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$;

g) $\mathrm{Im}\frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; h) $\mathrm{Re}\frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; i) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = C$;

j) $\mathrm{Im}\frac{1}{z} = C$; k) $\mathrm{Re}z^2 = C$; l) $\mathrm{Im}z^2 = C$;

m) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$;

$a, b, \alpha, \beta, R, R_1, R_2, k, C, \lambda$ valós számok.

11. Írjuk fel a z és $\overline{z}$ segítségével a következő görbék egyenletét:

a) $y = 2x$; b) $y = 3x + 1$;

c) $x^2 + y^2 = 1$; d) $x^2 + y^2 + 2x - 4x + 10 = 0$;

e) $x^2 + 3y^2 = 1$.

II. LINEÁRIS FÜGGVÉNYEK

12. Határozzuk meg azt a lineáris egész függvényt, amely a $0, 1, i$ pontok által meghatározott háromszöget a hozzá hasonló, $0, 2, 1 + i$ csúcsokkal bíró háromszögbe transzformálja. Leképezhető-e az eredeti háromszög a $-1, 1, i$ pontok által meghatározott háromszögre?

13. Határozzuk meg azt a lineáris egész függvényt, amely az $1 + 2i$ pontot változatlanul hagyja, az i-t pedig $-i$-be viszi át.

14. Határozzuk meg azon lineáris egész függvényeket, amelyek által létesített leképezés

a) a felső félsíkot önmagára;

b) a felső félsíkot az alsó félsíkra;

c) a felső félsíkot a jobboldali félsíkra;

d) a jobboldali félsíkot önmagára képezik le.

Bizonyítsuk be, hogy ezek a transzformációk egyértelműen meg vannak határozva azáltal, ha egy belső pontnak vagy két határpontnak a képe adott.

15*. Határozzuk meg annak a lineáris egész függvénynek általános alakját, amely

a) a $0 < x < 1$ sávot önmagára;

b) a $-2 < y < 1$ sávot önmagára;

c) az $y = x$ és $y = x - 1$

egyenesek által határolt sávot önmagára képezi le. Keressünk egymásnak megfelelő pontpárokat ezen leképezéseknél, és vizsgáljuk meg, hogy ilyen párok rögzítésével egyértelművé tehetők-e ezek a transzformációk (lásd előző feladat).

16. Határozzuk meg azokat a lineáris egész $w(z)$ leképezéseket, amelyek az alább megadott egyenesek közötti sávokat a $0 < u < 1$ sávba képezik le, és eleget tesznek a megadott kiegészítő feltételeknek is:

a) $x = a$, $x = a + h$, $w(a) = 0$;

b) $x = a$, $x = a + h$, $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$, $\mathrm{Im}w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$;

c) $y = kx$, $y = kx + b$, $w(0) = 0$;

d) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, $w(ib_1) = 0$.

(Itt és a továbbiakban $z = x + iy$, $w = u + iv$).

17. Keressük meg annak a lineáris leképezésnek az általános alakját, amely a $|z| < 1$ körlapot a $|w - w_0| < R$ körlapra képezi, úgy, hogy a középpontok egymásnak felelnek meg, az eredeti kör vízszintes átmérője pedig a képkörnek abba az átmérőjébe megy át, amely a valós tengellyel α szöget zár be.

18. Határozzuk meg a $w = \frac{1}{z}$ leképezésnél az alábbi görbék képét:

a) $x^2 + y^2 = ax$; b) $x^2 + y^2 = by$; c) $y = x + b$;

d) $y = kx$; e) a z_0 ponton áthaladó egyenesek

f) $y = x^2$.

19. Határozzuk meg azokat a lineáris egész vagy törtfüggvényeket, amelyek a $-1, i, 1 + i$ pontokat rendre a

a) $0,\ 2i,\ 1 - i$; b) $i,\ \infty,\ 1$

pontokba transzformálják.

20. Határozzuk meg azokat a lineáris egész vagy törtfüggvényeket, amelyek a $-1,\ \infty,\ i$ pontokat rendre az

a) $i,\ 1,\ 1 + i$; b) $\infty,\ i,\ 1$; c) $0,\ \infty,\ 1$

pontokba transzformálják.

21. Határozzuk meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $-1, 0, 1$ pontokat az $1, i, -1$ pontokba viszi, és határozzuk meg, hogy mi lesz ennél a leképezésnél a felső félsík képe.

22*. Határozzuk meg annak a lineáris törtfüggvénynek az általános alakját, amelyik

a) a felső félsíkot önmagára;

b) a felső félsíkot az alsó félsíkra;

c) a felső félsíkot a jobboldali félsíkra képezi le.

23. Bizonyítsuk be, hogy a $w = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ leképezés mellett a $|w| = \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$ feltételt kielégítő pontok mértani helye kör.

24. Mi lesz a z-sík adott tartományának képe az adott leképezés során:

a) $\{x < 0,\ y < 0\}$, $\quad w = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$;

b) $\{|z| < 1,\ y > 0\}$, $\quad w = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$;

c) $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$, $\quad w = \dfrac{z}{z - 1}$;

d) $1 < |z| < 2$, $\quad w = \dfrac{z}{z - 1}$;

e) $\{x > 0,\ y > 0\}$, $\quad w = \dfrac{z - i}{z + i}$;

f) $0 < x < 1$, $\quad w = \dfrac{z - 1}{z}$;

g) $0 < x < 1$, $\quad w = \dfrac{z - 1}{z - 2}$.

25*. Képezzük le a $0 < \operatorname{Re} w < 1$ sávra

a) a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkot, amelyből hiányzik a $\left|z - \frac{d}{2}\right| \le \frac{d}{2}$ körlemez;

b) a $\left|z - \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$ és $\left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}$ $(d_1 < d_2)$ körvonalak által meghatározott két szöget;

c) a $\left|z + \frac{d_1}{2}\right| = \frac{d_1}{2}$, $\left|z - \frac{d_2}{2}\right| = \frac{d_2}{2}$ körök külsejét úgy, hogy $w(d_2) = 0$ is teljesüljön.

26. Mi lehet a képe a lineáris törtfüggvény által szolgáltatott leképezésnél

a) egyenesnek; b) két párhuzamos egyenesnek;

c) két metsző egyenesnek; d) háromszögnek; e) körgyűrűnek;

f) körcikknek?

27. A
$$w = e^{i\alpha}\frac{z - \beta}{z\bar{\beta}} \quad (\beta = a + ib,\ b > 0)$$
leképezés a felső félsíkot az egységkörlemezre képezi le.

a) Határozzuk meg az $\arg w(x) = \Theta(x)$ függvényt.

b)* Határozzuk meg, hogy a felső félsík mely része tágul és mely része zsugorodik ennél a leképezésnél.

28. Képezzük le a $|z - 4i| < 2$ körlemezt a $v > u$ félsíkra úgy, hogy a kör középső pontja a $w = -4$ pontba, a körön levő $z = 2i$ pont pedig az origóba kerüljön.

29. Leképezhető-e a felső félsík az egységkörlemez alsó felére törtlineáris leképezéssel?

30*. Adjuk meg annak a $w(z)$ lineáris törtfüggvénynek az általános alakját, amely a $|z| < 1$ körlemezt a $\operatorname{Re} w > 0$ félsíkra képezi, úgy, hogy $w(z_1) = 0$, $w(z_2) = \infty$, ahol z_1, z_2 a $|z| = 1$ körvonal adott pontjai $(\arg z_1 < \arg z_2)$.

31*. Határozzuk meg a felső félsíknak önmagára való olyan leképezését, hogy $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ $(\operatorname{Im} a > 0,\ \operatorname{Im} b > 0)$.

32. A $w = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $(|a| < 1)$ leképezés az egységkörlemezt önmagára képezi.

a) Határozzuk meg az $\arg w\left(e^{i\varphi}\right) = \Theta(\varphi)$ függvényt.

b) Határozzuk meg, hogy a sík mely része zsugorodik és mely része tágul ennél a leképezésnél.

33. Határozzuk meg azt a lineáris egész, illetve törtfüggvényt, amely a $|z| < 1$ körlemezt a $|w - 1| < 1$ körlemezre transzformálja, továbbá $w(0) = \frac{1}{2}$ és $w(1) = 0$.

34. Határozzuk meg annak a körnek a középpontját és sugarát, amelyre a $w = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ $(\operatorname{Im} z_2 \neq 0)$ leképezés a valós tengelyt képezi le.

35. Határozzuk meg azoknak a $w(z)$ lineáris törtfüggvényeknek az általános alakját, amelyek a $|z| < R$ körlemezt önmagára képezik, és

a) $w(a) = 0$ $\quad(|a| < R)$; b) $w(a) = b$ $\quad(|a| < R,\ |b| < R)$;

c) $w(\pm R) = \pm R$.

36*. Képezzük le a $|z| < 1$ körlemezt önmagára úgy, hogy a körlemez z_1, z_2 pontja az a és $-a$ pontba menjen át $(0 < a < 1)$. Határozzuk meg az a számot.

37*. Bizonyítsuk be, hogy az egységkörlemezt önmagára képező lineáris törtfüggvényt egyértelműen meghatározza egy belső pont és egy határpont képének megadása.

38. Adjuk meg azokat a lineáris törtfüggvényeket, amelyeknél

a) az $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ körvonal képe az $u + v = 1$ egyenes;

b) az $y = mx + b$ egyenesnek a $v = Mu + B$ egyenes a képe (m, b, M, B, valós számok).

39*. Bizonyítsuk be, hogy ha a $|z| < 1$ körlemeznek önmagára való törtlineáris leképezése nem forgás, akkor egyetlen origó középpontú koncentrikus gyűrű sem mehet át koncentrikus gyűrűbe.

40*. Képezzük le a $|z-h| < R$ $(h > R)$ körlappal kilyukasztott jobboldali félsíkot egy $\rho < |w| < 1$ gyűrűre úgy, hogy a képzetes tengelynek a $|w| = 1$ körvonal legyen a képe. Határozzuk meg ρ értékét.

41*. A $|z-3| = 9$, $|z-8| = 16$ körvonaluk által meghatározott excentrikus gyűrűt képezzük le egy $\rho < |w| < 1$ gyűrűre. Határozzuk meg ρ értékét.

III. FOLYTONOSSÁG, DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

42. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét, ha létezik:

a) $\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{3}\right)^n$; b) i^n; c) $(1+i)^n$;

d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$; e) $\frac{(1+i)^n}{n^2}$; f) $\frac{(2+i)^n}{n!}$;

g) $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$; h) $\left(1 + \frac{i}{n^2}\right)^n$; i) $\left(i + \frac{1}{n}\right)^n$;

j) $(\cos 1 + i \sin 1)^n$; k) $\left(i \cos \frac{1}{n}\right)^n$.

43. a) Hol differenciálhatók a következő függvények: $w = \operatorname{Re} z$; $w = \operatorname{Im} z$; $w = |z|$; $w = z \cdot \bar{z}$; $w = (\operatorname{Re} z)^2$; $w = \frac{z}{|z|+1}$; $w = (\operatorname{Re} z)^3 + i(\operatorname{Im} z)^3$; $w = z \operatorname{Re} z$.

b) Bizonyítsuk be, hogy a

$$w = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvényre az egész síkon teljesülnek a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek és ugyanakkor a függvény nem is folytonos a $z = 0$ pontban.

44. Határozzuk meg a megadott $u(x,y)$ függvényhez (ha lehetséges) a $v(x,y)$ függvényt úgy, hogy az $u(x,y) + iv(x,y)$ holomorf legyen a komplex sík adott tartományán:

a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$, $\quad 0 < |z| < \infty$;

b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\quad 0 < |z| < \infty$;

c) $u(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$ a z sík, kivéve a $\{-\infty < x \le 0,\ y = 0\}$ negatív valós tengelyt;

d) $u(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$, $\quad 0 < |z| < \infty$;

e) $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x+y)$, $\quad 0 < x, y < 4$.

45. a) Ha $u(x,y)$ harmonikus függvény, harmonikus-e a négyzete is?

b) Ha $u(x,y)$ harmonikus, milyen $f(t)$ függvényekre lesz az $f(u(x,y))$ függvény is harmonikus?

c) Harmonikusak-e az $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\log|f(z)|$ függvények, ha $f(z)$ holomorf?

46. Létezik-e következő alakú harmonikus függvény, ha igen, adjuk is meg:

a) $u = u(x)$; b) $u = u(ax + by)$ $\quad$ (a, b valós számok);

c) $u = u\left(x^2+y^2\right)$; d) $u = u\left(x^2+y\right)$.

IV. SOROK

47. I. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor, ha

Ilézsub kész

a) $a_n = \frac{n}{3^n}$; b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$; c) $a_n = \frac{e^{in}}{n}$;

d) $a_n = \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$; e) $a_n = \frac{e^{in}}{n^2}$; f) $a_n = \frac{\cos in}{2^n}$?

II. Határozzuk meg a következő sorok összegét:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}\right)^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3+i^n}\right)^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2in-2}$; f) $\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\pi^n}{n!}$;

g) $\sum \frac{i^n}{n!}$; h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(2n)!!}$.

48. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ komplex számokra érvényes, hogy $-\alpha \le \arg z \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sorokra áll, hogy vagy mindkettő konvergens, vagy mindkettő

divergens.

49*. Léteznek-e $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ komplex számok úgy, hogy minden k-ra ($k = 1, 2, \ldots$) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k$ konvergens, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^k$ pedig divergens?

50. Állapítsuk meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$;   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos(in)$;   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$.

51. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciasugara R ($0 < R < \infty$), határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n z^n$;   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)\, a_n z^n$;   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

52*. Állapítsuk meg, hogy a következő hatványsorok hogyan viselkednek a konvergenciakörön:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$;   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$;   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

53. Fejtsük az $a = 0$ pont körüli hatványsorba a következő függvényeket és állapítsuk meg e sorok konvergenciasugarát is:

a) $\dfrac{1}{3z+2}$;   b) $\dfrac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$;   c) $\dfrac{z}{z^2 - 6z + 13}$;

d) $\dfrac{z^2}{(z+2)^2}$;   e) $\sqrt{z+i}$;   f) $\ln \dfrac{1+z}{1-z}$;

g) $\ln\left(z^2 - 3z + 2\right)$;   h) $\sin^2 z$;   i) $\cos^2 z$.

54. Fejtsük $z - 1$ hatványai szerint haladó sorba a következő függvényeket:

a) $\dfrac{z+1}{z+5}$;   b) $\dfrac{z-3}{z^2 - 2z + 7}$;

c) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$;   d) $\sin\left(2z - z^2\right)$.

V. ELEMI FÜGGVÉNYEK

55. Számítsuk ki az alábbi komplex számok abszolut értékét és argumentumát:

a) e^{2+i};   b) e^{2-3i};   c) e^{3+4i};

d) e^{-3-4i};   e) $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0)$;   f) $e^{-i\varphi}$ (φ valós szám).

56. Határozzuk meg az alábbi összegeket:

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

b) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;

c) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;

d) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;

e) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin nx$.

57. Fejezzük ki valós változós függvényekkel a $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ valós és képzetes részét és abszolut értékét.

58. Számítsuk ki:

a) $\cos(2+i)$;   b) $\sin(2i - 3)$;   c) $\operatorname{tg}(2-i)$;

d) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - i \log 2\right)$;   e) $\sin \pi i$;   f) $\cos \pi i$;

g) $\operatorname{ctg} \pi i$;   h) $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} i$.

59. Határozzuk meg az e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ függvények mindegyikére a z-sík azon pontjainak halmazát, ahol a függvény

a) valós értékeket;

b) tiszta képzetes értékeket

vesz fel.

60. Bizonyítsuk be, hogy ha $\cos(z + \omega) = \cos z$ minden z-re, akkor $\omega = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

61. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sin z = 3$;   b) $e^z + i = 0$;

c) $|\operatorname{tg} z| = 1$;   d) $4 \cos z + 5 = 0$;

e) $\sin z = \pi i$;   f) $e^{ix} = \cos \pi x$ (x valós);

g) $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$;   h) $\ln(z + i) = 0$;

i) $\ln(i - z) = 1$; j) $\sin z + \cos z = 5$.

62. Számítsuk ki:

a) $\log 4$; b) $\log(-1)$; c) $\log i$;

d) $\log^* i$; e) $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; f) $\log(2 - 3i)$;

g) $\log(-2 + 3i)$.

63. Keressük meg a hibát a következő okoskodásban: minden z-re $(-z)^2 = z^2$, ezért $z \neq 0$ esetén $2\log(-z) = 2\log z$, tehát $\log(-z) = \log z$. (Bernoulli-paradoxon.)

64. Határozzuk meg az alábbi kifejezések összes értékeit:

a) $1^{\sqrt{2}}$; b) $(-2)^{\sqrt{2}}$; c) 2^i;

d) 1^{-i} e) i^i; f) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;

g) $(3 - 4i)^{1+i}$; h) $(-3 + 4i)^{1+i}$.

65. Megegyeznek-e az $a^{2\alpha}$, $(a^\alpha)^2$, $(a^2)^\alpha$ kifejezések értékei, ha a, α tetszőleges komplex számok?

66. Számítsuk ki:

a) $\arcsin \frac{1}{2}$; b) $\arccos \frac{1}{2}$; c) $\arccos 2$;

d) $\arcsin i$; e) $\mathrm{arctg}(1 + 2i)$.

67. Milyen görbéket határoznak meg a következő paraméteres előállítások:

a) $z = 1 - it$, $0 \leq t \leq 2$;

b) $z = t + it^2$, $-\infty < t < \infty$;

c) $z = t^2 + it^4$, $-\infty < t < \infty$;

d) $z = a(\cos t + i \sin t)$, $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ $(a > 0)$;

e) $z = t + \frac{i}{t}$, $-\infty < t < 0$.

68. 1) Mi lesz a képe a w-síkban a $w = z^2$ által szolgáltatott leképezés során a z-sík alábbi görbéinek:

a) $x = c$; b) $y = c$; c) $x = y$;

d) $z = R$; e) $\arg z = \alpha$;

ahol c, R, α valós számok. Vizsgáljuk meg, hol lesz a leképezés kölcsönösen egyértelmű!

2) A z-sík mely görbéinek képe a $w = z^2$ által szolgáltatott leképezés során az

a) $u = c$; b) $v = c$ (c valós szám).

69. Mi lesz a z-sík megadott görbéinek képe a megadott leképezés során:

a) $|z| = 1$, $w = \frac{z}{(1-z)^2}$;

b) $x = c$, $w = e^z$;

c) $y = c$, $w = e^z$;

d) $x = y$, $w = e^z$;

e) $x^2 + y^2 = c$, $w = \log z$.

70. Határozzuk meg a $w = z^2$ és a $w = z^3$ függvények által szolgáltatott leképezések során a z_0 ponthoz tartozó φ előfordulási szöget és k nagyítási tényezőt:

a) $z_0 = 1$; b) $z_0 = -\frac{1}{4}$; c) $z_0 = 1 + i$;

d) $z_0 = -3 + 4i$.

71. A z-sík mely része zsugorodik és mely része tágul a következő függvények által szolgáltatott leképezéseknél:

a) $w = z^2$; b) $w = z^2 + 2z$; c) $w = \frac{1}{z}$;

d) $w = e^z$; e) $w = \log(z - 1)$.

72. Határozzuk meg az $\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 8\}$ tartomány képét a $w = e^z$ függvény által létesített leképezés során $(z = x + iy)$. Kölcsönösen egyértelmű-e ez a leképezés?

VI. ELEMI FÜGGVÉNYEK ÁLTAL SZOLGÁLTATOTT KONFORMIS LEKÉPEZÉSEK

73. A $w = z^2$ és inverze alkalmazásával képezzük le konformisan a) az $x^2 - y^2 = a^2$ hiperbola jobboldali ágának belsejét a felső félsíkra; b) az $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ parabola "külsejét" (azaz a parabola által határolt azon tartományt, amely a parabola fókuszát nem tartalmazza) a felső félsíkra; c) az $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$ görbe belsejét a $\rho = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ kardióda belsejére; d) az $r = a\cos\varphi$ $(a > 0)$ görbe belsejét a $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$ lemniszkáta jobboldali ágának belsejére.

74*. Mi a képe a $|z| < 1$ körlapnak a $w = R(z + mz^2)$ $(R > 0, 0 \leq m \leq \frac{1}{2})$ leképezésnél?

Határozzuk meg az $r = \text{const.}$, görbék képét is.

75. Mi a képe a $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ félkörlemeznek a $w = z + z^2$ leképezésnél?

76*. Állapítsuk meg, hogy m milyen értékeinél képeződik le konformisan a $|z| < 1$ körlemez a $w = R(z + mz^n)$ (n természetes szám) leképezés során. Határozzuk meg a képtartományt.

77. Képezzük le a megadott tartományokat a felső félsíkra konformisan (úgy, hogy a kiegészítő feltételek is teljesüljenek):

a) $\{0 < \arg z < \pi\alpha\}$ $(0 < \alpha \leq 2)$;

b) $\left\{-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}$, $w(1-i) = 2$, $w(i) = -1$, $w(0) = 0$;

c) $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; $w(-1) = 0$, $w(0) = 1$;

d) $\{|z| < 1, |z - i| < 1\}$;

e) $\{|z| < 1, |z - i| > 1\}$;

f) $\{|z| > 1, |z - i| < 1\}$;

g) $\{|z| > 1, |z - i| > 1\}$;

h) a $[-1, 1]$ zárt intervallum mentén felvágott sík;

i) a $[-i, i]$ mentén felvágott sík;

j) a $(-\infty, -R]$, $[R, \infty)$ félegyenesek mentén felvágott sík;

k) a $-1, 1$, ih $(0 < h < 1)$ pontokat összekötő kör mentén felvágott sík;

l) a felső félkörlemez külseje, felvágva a $[0, -i]$ mentén (egy "lapát" külseje);

m) a $|z| < 1$ körlemez, felvágva a $[0, 1]$ szakasz mentén;

n) a $|z| > 1$ tartomány felvágva az $[1, \infty)$ félegyenes mentén.

78. Mi a képe a $|z| = \text{const.}$, $\arg z = \text{const.}$ polárhálónak a $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ leképezésnél?

79. Határozzuk meg, hogy az előző feladatban adott leképezés hova transzformálja az alábbi tartományokat:

a) $|z| < r < 1$; b) $|z| > r > 1$; c) $|z| < 1$;

d) $|z| > 1$; e) $\operatorname{Im} z > 0$; f) $\operatorname{Im} z < 0$;

g) $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; h) $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$; i) $\{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

j) $\{R < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

80*. Felhasználva az előző két feladatban szereplő függvényt, valósítsuk meg az alábbi konformis leképezéseket:

a) a $[-c, c]$ intervallum "külsejét" $(c > 0)$ az egységkörlemez külsejére úgy, hogy $w(\infty) = \infty$, $\arg w'(\infty) = \alpha$;

b) az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis külsejét az egységkörlemez külsejére úgy, hogy $w(\infty) = \infty$, $\arg w'(\infty) = \alpha$;

c) a felső félsíknak az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis külsejében levő részét a felső félsíkra;

d) az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2+k^2} + \frac{y^2}{b^2+k^2} = 1$ $(a > b)$ ellipszisek által határolt gyűrűt egy origó középpontú koncentrikus körök által határolt gyűrűre.

81. Határozzuk meg az adott tartomány képét az adott leképezésnél:

a) $\{|z| < 1\}$, $\quad w = \dfrac{z}{z^2 + 1}$;

b) $\{|z| < 1\}$, $\operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad w = \dfrac{1}{z^2 + 1}$;

c) $\left\{0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$; $\quad w = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$;

d)* $\left\{-\dfrac{\pi}{n} < \arg z < \dfrac{\pi}{n},\ |z| < 1\right\}$, $\quad w = \dfrac{z}{(1 + z^n)^{2/n}}$.

$(w(z) > 0$, ha $z > 0)$

82*. Keressük meg azt a konformis leképezést, amely

a) az egységkörlemez belsejét;

b) az egységkörlemez külsejét

leképezi a

$$|w| \leq 1, \ \arg w = 2k\pi/n \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

halmazra.

83. Képezzük le konformisan az egységkörlemez külsejére

a) a síkot, amely fel van vágva a $[-1, 1]$ és $[-i, i]$ intervallumok mentén;

b) a síkot, amely fel van vágva a $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, $(-i\infty, -i]$, $[i, i\infty)$ félegyenesek mentén.

84. Képezzük le konformisan a $[-a, b]$ és $[-ci, ci]$ $(a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ szakaszok mentén felvágott síkot

a) a felső félsíkra;

b) az egységkörlemez külsejére.

85. Határozzuk meg az alábbi ponthalmazok képét a $w = e^z$ leképezésnél:

a) derékszögű háló ($x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$)

b) $y = kx + b$ egyenesek;

c) az $\alpha < y < \beta$ $(0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$ sáv;

d) az $y = x$, $y = x + 2\pi$ egyenesek közötti sáv;

e) $\{x < 0,\ 0 < y < \alpha \leq 2\pi\}$;

f) $\{x > 0,\ 0 < y < \alpha \leq 2\pi\}$;

g) $\{\alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$ $(-\gamma \leq 2\pi)$.

86. Határozzuk meg az adott ponthalmazok képét a $w = \ln z$ leképezésnél:

a) $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ polárháló;

b) az $r = Ae^{k\varphi}(A > 0)$ logaritmikus spirális;

c) $\{0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi\}$;

d) $\{|z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi\}$;

e) az $\{r_1 < |z| < r_2\}$ gyűrű, felvágva az $[r_1, r_2]$ szakasz mentén.

87*. Bizonyítsuk be, hogy a $w = \ln \frac{a+z}{a-z}$ leképezés a $(-\infty, -a]$, $[a, \infty)$ félegyenesek mentén felvágott síkot az $|\mathrm{Im}\ w| \leq \pi$ sávra képezi le, miközben a vágás felső partjának az $\mathrm{Im}\ w = \pi$, alsó partjának az $\mathrm{Im}\ w = -\pi$ egyenes felel meg.

88. Határozzuk meg az alábbi ponthalmazoknak a $w = \cos z$ leképezés által szolgáltatott képét:

a) $x =$ const., $y =$ const. derékszögű háló;

b) $\{0 < x < \pi,\ y < 0\}$;

c) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$;

d) $\left\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$;

e) $\{0 < x < \pi\}$;

f) $\{0 < x < \pi;\ -h < y < h\}$ $(h > 0)$.

89. Határozzuk meg az alábbi ponthalmazoknak a $w = \arcsin z$ leképezés által szolgáltatott képét:

a) felső félsík;

b) a $(-\infty, -1], [1, \infty)$ félegyenesek mentén felvágott sík;

c) az első síknegyed;

d) a baloldali félsík, felvágva a $(-\infty, -1]$ félegyenes mentén.

90. Határozzuk meg az alábbi ponthalmazok képét a $w = \mathrm{tg}\, z$ leképezésnél:

a) az $x =$ const., $y =$ const. derékszögű háló;

b) $\{0 < x < \pi,\ y > 0\}$;

c) $\{0 < x < \pi\}$;

d) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{4}\right\}$;

e) $\left\{-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$.

91. Képezzük le konformisan az alábbi tartományokat a felső félsíkra:

a) az $y = x$ és $y = x + h$ egyenesek közötti sáv;

b) $\{x < 1,\ 0 < y < h\}$;

c) a $|z| = 2$ és $|z - 1| = 1$ körvonalak által határolt tartomány;

d)* a $|z| = 2$, $|z - 3| = 1$ körök által határolt tartomány (a körök által kilyukasztott sík);

e)* $\{|z - 1| > 1,\ |z + 1| > 1,\ \mathrm{Im} z > 0\}$;

f)* a $0 < x < 1$ sáv felvágva az $x = \frac{1}{2}, h \leq y < \infty$ félegyenes mentén;

g)* a $a < x < 1$ sáv, felvágva az $x = \frac{1}{2}$, $h_1 \leq y < \infty$ és $-\infty < y \leq h_2$ $(h_2 < h_1)$ félegyenes mentén.

VII. INTEGRÁLOK

92. Számítsuk ki az $\int_C f(z)dz$ integrált, ha:

a) $f(z) = \mathrm{Re}\ z$,

$C:$ $\alpha)$ a $z = 2 + i$ pontba mutató helyzetvektor;

$\beta)\{|z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, kezdőpont a $z = 1$;

$\gamma)|z - a| = R$ $(R > 0)$;

b) $f(z) = \mathrm{Im}\ z$, $C:$ mint a)-ban;

c) $f(z) = z$,

$C:$ $\alpha)$ a $z = 2 - i$ pontba mutató helyzetvektor;

$\beta)$ $\{|z| = 1,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, kezdőpont a $z = 1$;

$\gamma)$ $\left\{|z| = 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, kezdőpont a $z = -i$,

$\delta)$ $z = R$;

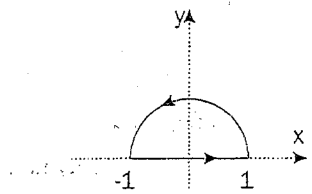
d) $f(z) = (\mathrm{Re}\ z)^2 + i(\mathrm{Im}\ z)^2$; $C:$ a $z = 1$ pontból a $z = i$ pontba mutató vektor;

e) $f(z) = z + 1, \quad C: y = x^2 \ (z = x + iy);$

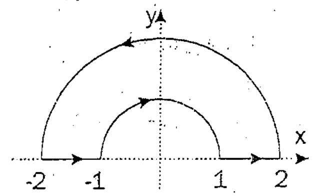
f) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}, \quad C: |z| = 2;$

g) $f(z) = |z|\bar{z}, \quad C$: az 1. ábrán látható zárt görbe;

h) $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}, \quad C$: a 2. ábrán látható zárt görbe;



1.ábra



2.ábra

i) $f(z) = (z-a)^n$ (n egész szám),

C: α) $\{|z-a| = R,\ 0 \le \arg(z-a) \le \pi\}$, kezdőpont a $z = a + R$;

β) $|z - a| = R$;

γ) tetszőleges $z = a$ középpontú négyzet, amelynek oldalai párhuzamosak a tengelyekkel;

j) $f(z) = z^n \log z$ (n egész szám),

$C: |z| = 1;\ \log(-1) = \pi i;$

k) $f(z) = z^\alpha$ (α komplex szám),

$C: |z| = 1,\ 1^\alpha = 1.$

93. $\alpha(0 \le \alpha \le 2)$ mely értékeire léteznek az

a) $\displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{z}} dz;$ b) $\displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{z^p}} dz$

integrálok (p természetes szám), ha C a $z = e^{i\alpha}$ pontba mutató helyvektor?

94. Számítsuk ki az

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

integrál értékét, ha:

a) C megkerüli a $z = 0$ pontot, a $z = i$ és $z = -i$ pontok C külsejében vannak;

b) C megkerüli a $z = i$ pontot, a $z = 0$ és $z = -i$ pontok C külsejében vannak;

c) C megkerüli a $z = 0,\ z = i,\ z = -i$ pontokat.

95.

$$\int_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1} \qquad (a > 1).$$

96. a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z e^z dz}{(z-a)^3}$ (a $z = a$ pont C belsejében van).

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)^3} dz.$

97.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)^3},$$

a) $z = 0$ pont C belsejében, a $z = 1$ pont C külsejében van;

b) a $z = 1$ pont C belsejében, a $z = 0$ pont C külsejében van;

c) a $z = 0$ és a $z = 1$ pont C belsejében van.

98*. Bizonyítsuk be Liouville tételét a következő módon: számítsuk ki az

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \qquad (|a| < R,\ |b| < R)$$

integrál értékét, illetve adjunk rá egy becslést, ha $R \to \infty$.

99*. Az $\alpha(0 \le \alpha < 2)$ mely értékeire létezik az

a) $I_1 = \displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{z}} dz$ b) $I_p = \displaystyle\int_C e^{-\frac{1}{z^p}} dz$

integrál (p természetes szám), ahol C a $z = e^{i\alpha}$ pontba mutató helyzetvektor.

100*. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(z)$ folytonos a $\{|z| \ge R_0,\ \mathrm{Im} z \ge a$ (a fixált valós szám) halmazon, és itt $f(z) \to 0$ ha $z \to \infty$, akkor minden pozitív m számra teljesül a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z) dz = 0$$

reláció, ahol Γ_R a $|z| = R$ körvonalnak a fenti halmazba eső része. (Jordan lemmája.)

101. Bizonyítsuk be, hogy ha az integrálási út nem halad át a $z = 0$ ponton, akkor

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \log r + i\varphi + 2\pi i k,$$

ahol a k egész szám azt mutatja, hogy az integrálási út hányszor kerülte meg az origót ($z = re^{i\varphi}$).

102*. Bizonyítsuk be, hogy ha az integrálási út nem halad át a $\pm i$ pontokon, akkor

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \text{ egész szám}).$$

VIII. LAURENT-SOROK. SZINGULÁRIS HELYEK. ZÉRÓ-HELYEK

103. A $z = 0$ körül fejtsük Laurent-sorba az alábbi függvényeket

a) $\dfrac{\sin z}{z^2}$; b) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$; c) $\dfrac{e^z}{z}$;

d) $\dfrac{e^z}{z^3}$; e) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$; f) $z^4 \cos \dfrac{1}{z}$;

g) $\dfrac{1}{z} \sin^2 \dfrac{2}{z}$; h) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; i) $\dfrac{1}{\sin z}$;

j) $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$.

104. Az adott gyűrűkben fejtsük Laurent-sorba a következő függvényeket:

a) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $1 < |z| < 2$ ill. $3 < |z| < \infty$;

b) $\dfrac{1}{z^2+z}$, $0 < |z| < 1$ ill. $1 < |z| < \infty$;

c) $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $1 < |z| < 2$ ill. $2 < |z| < \infty$;

d) $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1 < |z| < 2$;

e) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $|z| < 1$; $1 < |z| < 2$; $2 < |z| < \infty$;

f) $\dfrac{z}{z^2-1}$, $1 < |z+2| < 3$;

g) $\frac{1}{z^2+2z-8}$, $1 < |z+2| < 4$;

h) $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$, $2 < |z-1| < \infty$;

i) $\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $2 < |z| < \infty$;

j) $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $1 < |z| < 2$;

k) $\dfrac{1}{\cos z}$, $\dfrac{\pi}{2} < |z| < \dfrac{3\pi}{2}$;

l) $\dfrac{e^z}{z-1}$, $|z| > 1$;

m) $\dfrac{1}{z-2} \log \dfrac{z-i}{z+i}$, $1 < |z| < 2$.

105. Határozzuk meg a következő függvények szinguláris helyeit, és az egyes szinguláris helyek típusát. A $*$-gal jelölt feladatoknál számoljuk ki a szinguláris pontokhoz tartozó reziduumokat.

a)* $\dfrac{1}{z-z^3}$; b)* $\dfrac{z^4}{1+z^4}$; c)* $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$;

d)* $\dfrac{e^z}{1+z^2}$; e) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$; f)* $e^{-\frac{1}{z^2}}$;

g)* $e^{\frac{z}{1-z}}$; h) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$; i) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$;

j)* $\dfrac{1-e^z}{1+e^z}$; k) $e^{-z} \cos \dfrac{1}{z}$; l) $e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}$;

m)* $\dfrac{1}{\sin z}$; n)* $\operatorname{ctg}^3 z$; o)* $z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$;

p)* $\sin \dfrac{z}{z+1}$; q)* $\sin z \cdot \sin \dfrac{1}{z}$; r)* $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

s) $\dfrac{1}{\sin z - \sin a}$.

106. Hányadrendű 0-helye a $z = 0$ a következő függvényeknek:

a) $z^3 \left(e^{z^3} - 1\right)$; b) $6 \sin z^3 + z^3 \left(z^6 - 6\right)$;

c) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$; d) $\dfrac{z^6}{z - \sin z}$.

107. Állapítsuk meg a felsorolt függvények 0-helyeit és azt, hogy e 0-helyek hányadrendűek:

a) $z^3 + 1$; b) $\dfrac{z}{3+z^4}$; c) $z \sin z$;

d) $(1-\cos z) \sin^2 z$; e) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$; f) $\dfrac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$.

108. A z_0 pont az $f(z)$ függvénynek k-ad rendű, a $g(z)$ függvénynek pedig l-ed rendű 0-helye. Mit tudunk a következő függvényekről a z_0 pontban:

a) $f(z)+g(z)$; b) $f(z)\cdot g(z)$; c) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$.

109. Létezik-e az egységkörben holomorf $f(z)$ függvény, melyre:

a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\begin{cases}0 & \text{ha } n \text{ páros,}\\ \frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan;}\end{cases}$ b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páros,}\\ \frac{1}{n-1} & n \text{ páratlan;}\end{cases}$

c) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n}{n+1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

IX. INTEGRÁLOK MEGHATÁROZÁSA REZIDUUMSZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

110. Számítsuk ki az alábbi integrálokat, feltéve, hogy a zárt görbéken pozitív irányban haladunk:

a) $\displaystyle\int_{x^2+y^2=2x}\frac{dz}{z^4+1}$; b) $\displaystyle\int_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$;

c) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$; d) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$;

e) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z\,dz}{z+1}$; f) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z\,dz}{z^3+1}$;

g) $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{dz}{z^4+1}$; h) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^7(z+1)}$;

i) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^z\,dz}{z^2-1}$; j) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z\,dz}{z^3}$;

k) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}\,dz}{z^2(z^2-9)}$; l) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\sin\frac{1}{z}\,dz$;

m) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\sin^2\frac{1}{z}\,dz$; n) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin z\,dz}{(z-1)^2(z^2+9)}$;

o) $\displaystyle\int_{|z|=10}\operatorname{tg}^2 z\,dz$; p) $\displaystyle\int_{|z|=5}\frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$;

q) $\displaystyle\int_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$.

111*. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{zg(z)}dz$$

integrált, ahol C egyszerű zárt görbe, amely megkerüli a $z=0$ pontot, az $f(z)$ és $g(z)$ függvény holomorf C-n és belsejében, valamint $g(0)\neq 0$, $g(z)$-nek a C görbén nincs 0-helye, C belsejében pedig csak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egyszeres 0 helyei vannak.

112*. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r\neq 1}\frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$;

b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$, C : az $y^2=x$ parabola;

c) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{a^z\sin\pi z}$, $C: x=\alpha(0<\alpha<1)$ szakasz $(a>0)$.

Számítsuk ki az alábbi valós integrálokat:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5+3\sin\varphi}$; b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{5-4\cos\varphi}$;

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(\cos\varphi+2)^2}$; d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(3+\cos^2\varphi)^2}$.

113. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$; d) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

e) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$;

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a > 0,)$; h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n természetes szám);

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

j)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$; k)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n dx}{1+x^{2n}}$;

l)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x dx}{x^2+4}$; m)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2x dx}{x^2+x+1}$;

n)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x dx}{x^4+1}$; o)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 \cos 3x dx}{(x^2+1)^2}$.

4*. Legyen $f(z) = e^{imz}F(z)$, ahol $m > 0$, és az $F(z)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal: 1) a felső félsíkon véges sok szingularitása van: $a_1, a_2, \dots, a_n$; 2) a valós tengely minden pontjában differenciálható, kivéve az $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontokat, ahol egyszeres pólusai vannak; 3) $F(z) \to 0$ ha $z \to \infty$ és $\operatorname{Im} z \geq 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{res}\,[f(z)]_{z=a_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \operatorname{res}\,[f(z)]_{z=x_k} \right\}.$$

5*. Számítsuk ki az alábbi integrálokat az előző feladat eredményének felhasználásával:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}dx}{x}$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \cos x dx}{x^2-5x+6}$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)}$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx}{1-x^4}dx$.

6*. Számítsuk ki az alábbi integrálokat, feltéve, hogy $-1 < p < 2$:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^3}$; b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{1+x^2}$.

7*. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2+a^2}$; b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2+a^2}$; c) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

X. VEGYES FELADATOK*

118. Legyen $P_0(z) = z$, $P_n(z) = z\left(1-\frac{z^2}{1^2}\right)\dots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ $n = 1, 2, \dots$. Milyen z-re lesz $|P_n(z)|$ nagyobb, mint

$$|P_0(z)|,\ |P_1(z)|, \dots, |P_{n-1}(z)|,\ |P_{n+1}(z)|, \dots.$$

119. $f(t)$ $t \geq 0$-ra értelmezett valós, folytonos függvény. Legyen

$$P = \int_0^\infty e^{-(t+if(t))}dt;\quad Q = \int_0^\infty e^{-2(t+if(t))}dt.$$

Mutassuk meg, hogy $|4P^2 - 2Q| \leq 3$.

120. Mutassuk meg, hogy a $P(z) = z^n - p_1 z^{n-1} - \dots - p_n$ polinomnak, ahol $p_i \geq 0$ $i = 1, \dots, n$ és $p_1 + \dots + p_n > 0$, egyetlen pozitív zérőhelye van.

121. Ha z_0 a $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ polinom valamely zérőhelye, (nem minden a_i nulla) akkor $|z_0|$ nem nagyobb, mint $z^n - |a_1| z^{n-1} - \dots - |a_n|$ egyetlen pozitív zérőhelye.

122. Legyen $a_n \neq 0$. A $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ zérőhelyei abszolut értékei nem kisebbek, mint a $z^n + |a_1| z^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| z - |a_n|$ egyetlen pozitív zérőhelye.

123. Legyenek $d_0, d_1, \dots, d_n$ pozitív számok és legyen $d_n \geq |a_1| d_{n-1} + |a_2| d_{n-2} + \dots + |a_n| d_0$. Mutassuk meg, hogy a $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ zérőhelyei abszolut értékben nem nagyobbak, mint

$$\max\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}, \sqrt{\frac{d_n}{d_{n-2}}}, \dots, \sqrt[n]{\frac{d_n}{d_0}}\right).$$

124. Mit tudunk az $a_n = \frac{1^{ix}+2^{ix}+\dots+n^{ix}}{n}$ ($n = 1, 2, \dots, x$ valós szám) sorozat torlódási pontjairól?

125. $f(z)$ legyen holomorf a $|z| < R$ körben. Nevezzük $f(z)$ számtani közepének a $|z| = r < R$ körön a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(fe^{is}\right) ds = \lim_{n\to\infty} \frac{f(r)+f(rz_n)+\ldots+f\left(rz_n^{n-1}\right)}{n}$$

számot, ahol $z_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{is}\right) ds = f(0).$$

126. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n \cos nt}{1-r-2r\cos t} dt = \frac{2}{\sqrt{1-2r-3r^2}}\left(\frac{1-r-\sqrt{1-2r-3r^2}}{2r^2}\right)^n,$$

ha $-1 < r < \frac{1}{3}, n = 0,1,2,\ldots$.

127. Legyen $s > 1$ valós szám. Mutassuk meg, hogy a $ze^{s-z} = 1$ egyenletnek egyetlen gyöke van a $|z| \le 1$ körben.

128. Legyen $P_1,\ldots,P_n$ a sík n különböző pontja. Mutassuk meg, hogy a $\overline{PP_1}\cdot\ldots\cdot\overline{PP_n}$ szorzatnak a T tartományon nincs legnagyobb értéke.

129. Az $f(z)$ nem-állandó függvény legyen a T tartományon holomorf, $\overline{T}$ lezártján folytonos, és T-ben nem 0. Bizonyítsuk be, hogy $|f(z)|$ minimumát csak T határán veheti fel.

130. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf a $|z| < 1$ tartományon. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\{z_n\}$ sorozat, hogy $|z_n| < 1$ $(n = 1,2,\ldots)$, $|z_n| \to 1$ $(n\to\infty)$, és $f(z_n)$ korlátos.

131. Tegyük fel, hogy T korlátos tartomány, $f(z)$ T-ben holomorf, és

$$\limsup_{n\to\infty} |f(z_n)| \le M$$

minden olyan $\{z_n\}$ sorozatra, amely T határpontjához konvergál. Bizonyítsuk be, hogy $|f(z)| \le M$ $z \in T)$.

132. Ha a T tartományon holomorf $f(z)$ függvény abszolut értéke állandó, akkor az $f(z)$ is állandó.

133. Tegyük fel, hogy az $f(z)$ függvény holomorf a $|z| \le 1$ halmazt tartalmazó T tartományon, $f(z)$ nem állandó, és $|f(z)|$ a $|z| = 1$ körvonalon ugyanazt az értéket veszi fel. Bizonyítsuk be, hogy $f(z)$-nek a $|z| \le 1$ halmazon legalább egy 0-helye van.

134. Legyen T korlátos tartomány. Tegyük fel, hogy az $\{f_n(z)\}$ sorozat elemei T-ben holomorfak, a T tartomány $\overline{T}$ lezárásán folytonosak, és s sorozat T határán egyenletesen konvergens. Bizonyítsuk be, hogy a függvénysorozat $\overline{T}$-n egyenletesen konvergens.

135. Tegyük fel, hogy az $f(z)$ függvény a $\pi = \{z : \text{Re } z > 0\}$ félsíkon holomorf, $\overline{\pi}$-n folytonos, és létezik olyan $A < \infty$ és $\alpha < 1$, hogy

$$|f(z)| < A \exp\left[|z|^\alpha\right] \quad (z \in \pi),$$

továbbá $|f(iy)| \le 1$ minden valós y-ra. Bizonyítsuk be, hogy $|f(z)| \le 1$ a π félsíkon. Mutassuk meg, hogy az állítás $\alpha = 1$-re hamis.

136. Tegyük fel, hogy $f(z)$ az egész síkon holomorf, és minden z-re teljesül az $|f(z)| \le a + b|z|^k$ egyenlőtlenség (a, b, k pozitív állandók). Bizonyítsuk be, hogy $f(z)$ polinom.

137. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf a $|z| \le 1$ körlemezt tartalmazó T tartományon, és $|f(z)| < 1$, ha $|z| = 1$. Hány megoldása lehet az $f(z) = z$ egyenletnek $|z| \le 1$ körlemezen?

138. Legyen $f(z)$ a $|z| \le 1$ halmazt tartalmazó T tartományon holomorf, és tegyük fel, hogy $|f(z)| > 2$ a $|z| = 1$ körvonalon, továbbá $f(0) = 1$. Van-e 0-helye $f(z)$-nek a $|z| \le 1$ halmazon?

139. Bizonyítsuk be, hogy egy tartományon holomorf, nem azonosan 0 függvénynek legfeljebb megszámlálható sok 0-helye lehet.

140. Tegyük fel, hogy $\varphi(z)$ holomorf a T tartományon, $\varphi'(z) \ne 0$ T-ben, továbbá $f(u)$ holomorf a $\varphi(T)$ halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(u)$-nak u_0 m-szeres 0-helye, $\varphi(z_0) = u_0$, akkor a $g(z) = f(\varphi(z))$ függvénynek z_0 m-szeres 0-helye. Mit lehet mondani, ha $\varphi'(z)$-nek z_0 k-szoros 0-helye?