Fourier-sorok konvergenciájáról

A szereplő függvényekről mindenütt feltesszük, hogy 2π szerint periodikusak. Az ilyen függvények megközelítésére (nem a polinomok, hanem) a trigonometrikus polinomok tűnnek természetes eszköznek.

Többször fel fogjuk használni, hogy, ha f 2π-periodikus és integrálható, akkor bármely a-ra $\int_{-\pi}^{\pi} f = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f$.

Tekintsük a következő definíciókat:

1. Definíció. Az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

függvénysort **trigonometrikus sornak** nevezzük. Részletösszege

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

2. Definíció. Legyen f a $[-\pi, \pi]$-n integrálható, 2π-periodikus függvény, és legyenek

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Ekkor az

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

sort az f függvény **Fourier-sorának** nevezzük.

(Vegyük észre, hogy minden Fourier-sor egyben trigonometrikus sor is. Ez fordítva nem igaz, bár ez nem nyilvánvaló. (V.ö. 5. tétel.) Például a $\sum \sin(n!\,x)$ sor minden racionális x-ben konvergens, mégsem Fourier-sora egyetlen függvénynek sem.)

A helyzet egy kicsit hasonló a hatványsor vs. Taylor-sor problémához. A fő kérdés, amit vizsgálni fogunk, most is az, hogy vajon mikor „állítja elő” a Fourier-sora a függvényt?

Első észrevételünk, hogy ha az

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

sor konvergens, akkor az (1) sor a $[-\pi, \pi]$ intervallumon abszolút és egyenletesen konvergens, és saját összegfüggvényének a Fourier-sora.

3. Tétel. *Ha az*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

sor a $[-\pi, \pi]$ *intervallumon egyenletesen konvergens és összege* $f(x)$, *akkor*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Bizonyítás. Az

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

egyenlőséget szorozzuk meg $\cos nx$-szel és integráljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon (ezt megtehetjük, hiszen a sor egyenletesen konvergens):

$$(*) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx \, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \cos nx \, dx.$$

Érvényes a következő segédtétel:

4. Tétel. (A trigonometrikus rendszer ortogonalitása). *Bármely* $k, n \geq 0$ *egész értékre*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \textit{ha } k = n, \\ 0 & \textit{különben,} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0.$$

A tétel állítása egyszerűen adódik, pl. ha $k = n$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} \, dx = \pi,$$

ha pedig $k \neq n$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) \, dx = 0,$$

mert $\cos \nu x$ (és $\sin \nu x$) teljes perióduson vett integrálja mindig 0. (Trigonometrikus rendszernek hívjuk az $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots$ függvényeket; az ortogonalitás kifejezést az indokolja, hogy az $\int_a^b fg$ sok szempontból olyan, mintha f és g „skaláris szorzata” lenne, és ha a skaláris szorzat 0, akkor f és g „merőleges”.)

Segédtételünket felhasználva, a $(*)$ egyenlőség jobboldalán csak a $k = n$ tag marad meg, azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nx \, dx,$$

ebből

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

A b_n sinus-együtthatókra hasonlóan bizonyíthatunk. Ezzel a 3. Tételt beláttuk.

Egy adott függvény Fourier-együtthatóinak viselkedéséről szól a következő tétel.

5. Tétel. (Riemann lemma). *Ha f az $[a,b]$-n integrálható, akkor*

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \to 0 \quad \textit{és} \quad \int_a^b f(x)\sin nx\,dx \to 0 \quad \textit{ha} \quad n\to\infty.$$

Bizonyítás. A cosinusos állítást bizonyítjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Legyen $\mathbb{B}$ az $[a,b]$ intervallum egy (k részre történő) beosztása, ekkor

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\Big| = \Big|\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(t)-f(x_i)+f(x_i)\big)\cos nt\,dt\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(f(t)-f(x_i)\big)\cos nt\,dt\Big| + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos nt\,dt\Big| =: I_1 + I_2.$$

Legyen m_i és M_i a szokásos supremum és infimum, azaz minden $x_{i-1}\le t\le x_i$ esetén

$$m_i \le f(t) \le M_i \quad \text{és} \quad m_i \le f(x_i) \le M_i,$$

mivel $|\cos nt| \le 1$, könnyen látható, hogy

$$\Big|\big(f(t)-f(x_i)\big)\cos nt\Big| \le M_i - m_i,$$

ezért

$$I_1 \le \Big|\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} M_i - m_i\,dt\Big| = \Big|\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) = o(f,\mathbb{B}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha a $\mathbb{B}$ beosztást megfelelően választjuk (oszcillációs kritérium). Legyen $\mathbb{B}$ ilyen. Mivel f integrálható, korlátos is, legyen $|f(x)|\le M$, ekkor

$$I_2 \le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos nt\,dt\Big| \le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)|\Big|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos nt\,dt\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)|\Big|\Big[\frac{\sin nt}{n}\Big]_{x_{i-1}}^{x_i}\Big| \le\le \frac{1}{\pi}kM\frac{2}{n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ha $n > \frac{4kM}{\pi\varepsilon}$. Ezzel a tételt beláttuk.

Riemann–Lebesgue-lemmának nevezzük a fenti tétel alábbi változát: *Ha f a $[-\pi,\pi]$-n integrálható, 2π szerint periodikus, akkor*

$$a_n \to 0, \quad b_n \to 0, \quad \textit{ha} \quad n\to\infty,$$

ahol a_n, b_n a függvény Fourier-együtthatói. Ez az állítás a Riemann-integrálhatóságnál jóval általánosabb feltételek mellett is igaz.

A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen feltétel mellett igaz, hogy az adott f függvény Fourier-sora valamely a helyen konvergens. Ehhez a folytonosság nem elég: van olyan függvény, amely integrálható, 2π-periodikus és $[-\pi,\pi]$-n folytonos, de Fourier-sora valamely adott a pontban (vagy akár végtelen sok pontban) nem konvergens.

Kényelmi okokból az

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

részletösszeg helyett az

$$s_n^*(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{a_n}{2}\cos nx + \frac{b_n}{2}\sin nx$$

ún. módosított részletösszeget fogjuk vizsgálni; Ezt megtehetjük, hiszen a Riemann–Lebesgue lemma szerint

$$|s_n(x) - s_n^*(x)| = \left|\frac{a_n}{2}\cos nx + \frac{b_n}{2}\sin nx\right| \le \left|\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}\right| \to 0$$

(méghozzá x-ben egyenletesen), azaz s_n és s_n^* egyszerre konvergens vagy divergens, és ha konvergensek, összegük is megegyezik.

Először előállítjuk s_n^*-ot valamilyen „kezelhető” formában.

$$s_n^*(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{a_n}{2}\cos nx + \frac{b_n}{2}\sin nx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\sin kx\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt\cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\sin nx\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\Big)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx\Big)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\cos k(t-x)) + \frac{1}{2}\cos n(t-x)\Big)f(t)\,dt =$$

(2) $$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n^*(t-x)\,dt,$$

ahol

(3) $$D_n^*(u) := \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos(n-1)u + \frac{1}{2}\cos nu$$

az ún. **n-edik módosított Dirichlet-féle magfüggvény.**

Ilyen típusú összeggel már találkoztunk; $\sin\frac{u}{2}$-vel szorozva és felhasználva, hogy $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$, kapjuk, hogy

$$D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}}\,.$$

Vegyük észre, hogy D_n^* páros függvény és azt is, hogy $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^* = 1$ (ha a (3) formulát integráljuk, a jobboldalon minden kiesik, kivéve az $\frac{1}{2}$ integrálját).

Érvényes tehát a következő

6. Tétel. *Ha f a $[-\pi,\pi]$-n integrálható és 2π-periodikus, akkor Fourier-sorának módosított részletösszege előállítható*

$$s_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n^*(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n^*(t)\,dt \tag{4}$$

alakban (Ez az ún. Dirichlet-féle szinguláris integrál).

A második integrált az elsőből úgy kapjuk, hogy $t-x$ helyébe t-t írunk (azaz, legyen $t-x=u$, ekkor $t=x+u$, $dt=du$ és $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi-x}^{\pi-x}$; majd legyen $t=u$, $dt=du$). Vegyük észre továbbá, hogy a (4) formulában szereplő integrál a 0-ban improprius.

A D_n^* ismeretében a (4) formulát tovább alakítjuk. Valamely a helyen a részletösszeg

$$s_n^*(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a+t)D_n^*(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a-t)D_n^*(t)\,dt =$$

(t helyébe $-t$-t írtunk; D_n^* páros)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} D_n^*(t)\,dt =$$

(mert ha két szám egyenlő, akkor az átlaguk is ugyanannyi; az integrandusz páros)

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} D_n^*(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} =: I_1 + I_2. \tag{5}$$

A második integrált vizsgálva,

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\Big)\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\sin nt\,dt,$$

és ez 0-hoz tart, mert mivel f integrálható és $\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} \geq \mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}$, így az

$$\Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\Big)\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}$$

függvény is integrálható, és alkalmazhatjuk a Riemann-lemmát.

(Úgy is fogalmazhattunk volna, hogy a fenti integrál valójában nem más, mint a

$$\begin{cases} \big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\big)\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}, & \text{ha } 0 \leq |t| \leq \delta, \\ 0, & \text{ha } \delta < |t|\pi \end{cases}$$

integrálható függvény n-edik sinus-együtthatója, tehát 0-hoz tart.)

Tehát a Fourier-sor konvergenciája az I_1-en múlik. Vegyük észre, hogy az I_1 integrálban csak a t „kicsi” értékei szerepelnek, érvényes tehát az alábbi

7. Tétel. (Lokalizációs tétel.) *Az f és g függvények legyenek a $[-\pi,\pi]$-n integrálhatók és 2π-periodikusak, továbbá tegyük fel, hogy van olyan δ_0, hogy minden $x \in (a-\delta_0, a+\delta_0)$ értékre $f(x) = g(x)$. Ekkor f és g Fourier-sora az a helyen egyszerre konvergens vagy divergens, és ha konvergensek, összegük megegyezik.*

Bizonyítás. Végezzük el eddigi átalakításainkat az f és a g függvényre is. Ha $\delta < \delta_0$, az I_1 integrál mindkét függvény esetében ugyanaz.

A tétel azért érdekes, mert a Fourier-együtthatók meghatározásához a függvényt az egész intervallumon ismernünk kell, tehát a 7. Tétel feltételei mellett is, a két függvény Fourier-sora különbözhet, a konvergenciaviselkedésük mégis azonos.

Vizsgáljuk meg, milyen feltételek biztosíthatják, hogy A Fourier-sor valamely a helyen $f(a)$-hoz tartson.

Mivel a t szerinti integráláskor $f(a)$ állandó,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(a)D^{*}_{(}t)\,dt = \frac{1}{\pi}f(a)\int_{-\pi}^{\pi} D^{*}_{(}t)\,dt = f(a).$$

Az (5) formula alapján írhatjuk, hogy

$$(6)\quad |s_n^*(a) - f(a)| = \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)D_n^*(t)\,dt\Big| = \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\Big| + \Big|\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Big| =: I_1 + I_2.$$

Ennek az integrálnak 0-hoz tartása jelenti tehát azt, hogy $s_n^* \to f$ az x helyen.

A második integrált vizsgálva,

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\sin nt\,dt,$$

és ez 0-hoz tart, mert mivel f integrálható és $\operatorname{tg}\frac{t}{2} \geq \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, így az

$$\Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$$

függvény is integrálható, és alkalmazhatjuk a Riemann-lemmát, ugyanúgy, mint az előbb.

Tehát az I_1 integrált kell vizsgálnunk (ez persze a 0-ban improprius, a D_n^* nevezője miatt).

8. Tétel. (Dini tétele). *Legyen*

$$\varphi(t) := \frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{2}.$$

Ha a vizsgált f függvény az a helyen olyan, hogy az

$$\int_0^{\pi}\Big|\frac{\varphi(t)}{t}\Big|\,dt$$

(improprius) integrál létezik (konvergens), akkor

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad ha \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

Bizonyítás. Láttuk már, hogy a (6) integrálban csak az I_1 a lényeges.

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)\frac{1}{t}\,\frac{2\frac{t}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,\sin nt\,dt.$$

Tudjuk, hogy $\frac{t}{\operatorname{tg} t} \to 1$ és $t \le \operatorname{tg} t$, ha $t \to 0$, érvényes tehát

$$= \Big|\Big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\Big)\frac{1}{t}\,\frac{2\frac{t}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\Big| \le \Big|\frac{\varphi(t)}{t}\Big|,$$

és mivel a Dini-féle feltétel teljesül, így a baloldalon lévő függvény is integrálható (az improprius integrálokra vonatkozó majoránskritérium miatt).

Ekkor azonban („szokásos" gondolatmenetünk szerint), a Riemann lemma miatt $I_1 \to 0$. (Mondjuk, mert I_1 nem más, mint az integrálható

$$\begin{cases} \big(\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2} - f(a)\big)\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}, & \text{ha } 0 \le |t| \le \delta, \\ 0, & \text{ha } \delta < |t| \le \pi \end{cases}$$

függvény n-edik sinus-együtthatója). Ezzel Dini tételét beláttuk.

Nincs más dolgunk, mint hogy a Dini-féle elegendő feltételt „aprópénzre váltsuk".

Említettük, hogy az a-beli folytonosság még nem garantálja a Fourier-sor konvergenciáját. A differenciálhatóság, mint erősebb feltétel, már igen.

9. Tétel. *Ha az f függvény az a helyen differenciálható, akkor*

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad \textit{ha} \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

Bizonyítás. Ha az f a-ban differenciálható, akkor

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{t} \to f'(a) \quad \text{és} \quad \frac{f(a-t)-f(a)}{t} \to f'(a),$$

azaz a Dini-tételben szereplő $|\frac{\varphi(t)}{t}|$ függvénynek a 0-ban (véges) határértéke van, így az improprius integrál létezik (ezt hívtuk nulladik alapesetnek). (Az világos, hogy $|\frac{\varphi(t)}{t}|$ integrálható bármely $[\delta, \pi]$ intervallumon.)

Az érdekesség kedvéért megemlítünk egy másik feltételt is.

10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény az értelmezési tartománya egy belső a pontjában **α-rendű Lipschitz-feltételnek** ($\alpha > 0$) tesz eleget, ha léteznek olyan $K, \delta > 0$ számok, hogy

$$|f(a+t) - f(a)| \le K|t|^\alpha, \quad \text{ha} \quad |t| \le \delta.$$

Könnyen belátható, hogy az $\alpha > 0$ rendű Lipschitz-feltételt kielégítő függvények folytonosak a-ban; ha $\alpha > 1$, akkor f differenciálható és $f'(a) = 0$, tehát igazából a $0 < \alpha \le 1$ értékek érdekesek. Az is világos, hogy ha $0 < \alpha < \beta$ és f teljesíti a β rendű Lipschitz-feltételt, akkor az α rendűt is.

11. Tétel. *Ha az f függvényre az a helyen valamely $0 < \alpha$ rendű Lipschitz-feltétel teljesül, akkor*

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad ha \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

Bizonyítás. Könnyen kiszámolható, hogy ekkor a Dini-féle tételben szereplő integrál létezik, hiszen

$$\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt \quad \text{vagy} \quad \int_0^\delta K\,dt$$

konvergensek.

Fenti tételeink valamivel általánosabb feltételek mellett is igazak, ti. akkor, ha f nem feltétlenül folytonos ugyan a-ban, de legfeljebb elsőfajú szakadása van, azaz léteznek a

$$f(a+0) := \lim_{t\to 0, t>0} f(x+t), \quad f(a-0) := \lim_{t\to 0, t>0} f(x-t)$$

féloldali határértékek.

Ekkor a Fourier-sor az

$$\breve{f}(a) := \frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$$

értékhez konvergál (ha egyáltalán konvergál). Előző meggondolásainkat $f(a)$ helyett $\breve{f}(a)$-val elvégezve, az alábbi eredményekhez jutunk:

8′. Tétel. (Dini tétele). *Legyen*

$$\varphi(t) := \frac{f(a+t)+f(a-t)-2\breve{f}(a)}{2} = \frac{f(a+t)+f(a-t)-f(a+0)-f(a-0)}{2}.$$

Ha a vizsgált f függvény az a helyen olyan, hogy az

$$\int_0^\pi \left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| dt$$

(improprius) integrál létezik (konvergens), akkor

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad ha \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

9′. Tétel. *Ha az f függvény az a helyen mindkét oldalról differenciálható, azaz léteznek a*

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(a+t)-f(a+0)}{t} = q_j \quad és \quad \lim_{t\to 0, t>0} \frac{f(a-t)-f(a-0)}{t} = q_b$$

(véges) határértékek, akkor

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad ha \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

Ezt a tételt szokás „félérintős feltételnek” nevezni, hiszen a q_b és q_j akkor léteznek, ha a függvény grafikonjához húzhatók bal- és jobboldali félérintők.

11′. Tétel. *Ha az f függvényre az a helyen mindkét oldalról valamely $0 < \alpha$ rendű Lipschitz-feltétel teljesül, azaz*

$$|f(a+t)-f(a+0)| \le Kt^\alpha \text{ és } |f(a-t)-f(a-0)| \le Kt^\alpha \quad ha \quad 0 < t \le \delta,$$

akkor

$$s_n^*(a) \to f(a), \quad ha \quad n \to \infty,$$

azaz a Fourier-sor a-ban a függvényhez konvergál.

A bizonyítások csak annyiban különböznek az eredeti bizonyításoktól, hogy az eredeti lépéseket kétszer, a bal és a jobb oldalon külön-külön kell megcsinálnunk.