Teljesség, folytonos függvények ...
1. sillabusz a Többváltozós függvények kurzushoz

Mi az, hogy „sillabusz”? Ez egy olyan iromány, ami segédanyagnak készült. Vázlatos, pontatlan, (szándékoltan) hiányos. Segíti a tanulást, vázlatot, ötleteket ad. Ugyanakkor, egy része a törzsanyagon túlmutat(hat).

Teljesség, egyváltozós eset

Tudjuk, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán érvényesek az alábbiak.

11. Tétel. *Ha $\mathbb{R}$ egy részhalmaza nemüres és felülről korlátos, akkor van legkisebb felső korlátja (felsőhatár-tulajdonság).*

12. Tétel. *Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja (Bolzano–Weierstrass tétel).*

13. Tétel. *Ha adott egy $[a, b] \subset K$ zárt intervallum, és I_γ, $\gamma \in \Gamma$ nyílt intervallumok egy olyan rendszere, hogy egyesítésük tartalmazza (lefedi) $[a, b]$-t, akkor kiválasztható közülük véges sok olyan $I_1, \dots, I_n$ intervallum, hogy már az ő egyesítésük is tartalmazza $[a, b]$-t (Heine–Borel-féle lefedési tétel).*

14. Tétel. *Ha (a_n) olyan sorozat, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén van olyan ν, hogy $\forall\, n, m > \nu$ értékre $|a_n - a_m| < \varepsilon$, akkor az (a_n) sorozat konvergens (Cauchy-féle konvergenciakritérium).*

15. Tétel. *Ha $[a_n, b_n]$ zárt intervallumok egy „szűkülő” sorozata, azaz $\forall\, n$-re $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, akkor a $\bigcap_n [a_n, b_n]$ metszet nem üres (Cantor-féle tétel).*

A Bev.anal. kurzusról tudjuk, hogy ezek „lényegében” ekvivalensek (pontosabban, 11 $\Leftrightarrow$ 12 $\Leftrightarrow$ 13 $\Leftrightarrow$ (14 és At) $\Leftrightarrow$ (15 és At), Ahol At az ún. Arkhimédeszi tulajdonság: ha $a \neq 0$, az (na) sorozat nem korlátos). Ebből (13) bizonyítása az újdonság. A Bev.anal. kurzuson (11)-et választottuk „teljességi axiómának” (és a többit bizonyítottuk) (ennek kényelmi okai voltak, bár mondjuk a (15) Cantor-tételnek nagyon erős szemléletes tartalma van).

(13) bizonyítása (csak azért is felsőhatár-tulajdonsággal). Legyen

$$H := \{x \in [a, b] : \text{ az } [a, x] \text{ intervallumhoz kiválasztható véges lefedés}\}.$$

Nyilván H nemüres ($a \in H$) és korlátos; legyen $c := \sup H$. Belátjuk, hogy $c = b$. Nyilván $c \le b$, tegyük fel, hogy $c < b$. Legyen I_0 (valamelyik) olyan intervallum, ami lefedi a c pontot; mivel nyílt, lefed $d_1 < c < d_2$, $d_1 \in H$ pontokat is. Az $[a, d_1]$ intervallum végesen lefedhető; ehhez a lefedéshez az I_0-t hozzávéve, az $[a, c]$, sőt az $[a, d_2]$ intervallumokat is lefedtük, tehát c nem supremum.

Többváltozós eset

A fentiekből (11) nem általánosítható az $\mathbb{R}^k$ térre, mert nincs rendezés. A korlátosság, nyíltság, zártság azonban értelmezhető fogalmak, ezekhez elég a távolságfogalom.

(Emlékeztetőül: Egy halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza $\Leftrightarrow$ ha egy konvergens sorozat minden pontja a halmazban van, akkor a határérték is $\Leftrightarrow$ komplementere nyílt. Egy halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont $\Leftrightarrow$ komplementere zárt. Egy halmaz korlátos, ha lefedhető egy origó körüli elég nagy gömbbel/téglával $\Leftrightarrow$ lefedhető valamely másik pont körüli elég nagy gömbbel/téglával.

Tudjuk, hogy az $\mathbb{R}^k$ térben érvényes a koordinátánkénti konvergencia tétele. Ebből azonnal adódik, hogy érvényesek az alábbiak:

22. Tétel. *Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja (Bolzano–Weierstrass tétel).*

22′. Tétel. *Minden korlátos, végtelen (számosságú) halmaznak van torlódási pontja (Bolzano–Weierstrass tétel).*

24. Tétel. *Ha $(\underline{a}_n)$ olyan sorozat, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén van olyan ν, hogy $\forall\, n, m > \nu$ értékre $d(\underline{a}_n, \underline{a}_m) < \varepsilon$, akkor az $(\underline{a}_n)$ sorozat konvergens (Cauchy-féle konvergenciakritérium).*

25. Tétel. *Ha A_n korlátos, nemüres, zárt halmazok egy „szűkülő" sorozata, azaz $\forall\, n$-re $A_{n+1} \subseteq A_n$, akkor a $\bigcap_n A_n$ metszet nem üres (Cantor-féle tétel).*

(Sorozat torlódási pontja: van hozzá konvergens részsorozat; halmaz torlódási pontja: minden környezetében van a halmaznak tőle különböző pontja.)

Például (22) bizonyítása. Legyen $\underline{a}_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)})$. Mivel a sorozat korlátos, minden koordinátasorozata is korlátos. Az egydimenziós B–W tételt ismerjük. Legyen (n_i) olyan részsorozat, hogy $a_{n_i}^{(1)}$ konvergens; utána legyen (n_{i_j}) olyan részsorozat, hogy $a_{n_{i_j}}^{(2)}$ is konvergens; $\ldots$. Az eljárás véges sok lépésben véget ér (és egy konvergens részsorozatot kapunk).

(24) bizonyítása. Az elegendőség az izgalmas. Vagy ugyanúgy bizonyítunk, mint az egydimenziós esetben (a B–W tételből); vagy vegyük észre azt, hogy ha egy vektorsorozatra teljesül a Cauchy-kritérium, akkor minden koordinátasorozatra külön-külön is teljesül; alkalmazzuk koordinátánként az ismert egydimenzós tételt.

(25) bizonyítása. Legyen $\underline{x}_n \in A_n$. Az $(\underline{x}_n)$ sorozat korlátos, így a B–W tétel szerint van konvergens részsorozata: $\underline{x}_{n_k} \to \underline{x}$. Bármely l-re $A_l \supseteq A_{n_k} \ni \underline{x}_{n_k}$, ha k elég nagy, ezért $(\underline{x}_{n_k})$ (valahonnét kezdve) egy A_l-beli sorozat; A_l zárt $\Rightarrow x \in A_l \Rightarrow x \in \bigcap A_l$.

Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{R}^k$ terekben a 22–25 állítások ekvivalensek, $22 \Leftrightarrow 22' \Leftrightarrow 24 \Leftrightarrow 25$.

Valójában a (22)–(25) állítások az $\mathbb{R}^k$-nál általánosabb „terekben" is megfogalmazhatók (de nem biztos, hogy érvényesek). Valamely (metrikus, normált, stb.) teret teljesnek szokás nevezni, ha érvényes benne a (24) Cauchy-kritérium.

A Heine–Borel tétel analógiájára értelmezhetünk egy új fogalmat (általában, tehát metrikus (vagy akár „környezetes" (topologikus) térben is).

K. Definíció. A H halmazt kompaktnak nevezzük, ha igaz rá, hogy ha I_γ, $\gamma \in \Gamma$ nyílt halmazok egy olyan rendszere, hogy egyesítésük lefedi (tartalmazza) H-t, akkor kiválasztható közülük véges sok olyan $I_1, \ldots, I_n$ nyílt halmaz, hogy már az ő egyesítésük is lefedi H-t.

KK. Tétel. *Az $\mathbb{R}^k$ térben egy halmaz kompakt $\Leftrightarrow$ korlátos és zárt $\Leftrightarrow$ érvényes benne a B-W tétel.*

Korlátos és zárt $\Rightarrow$ kompakt bizonyítása. Legyen először H egy zárt tégla, és I_γ, $\gamma \in \Gamma$ neki egy nyílt lefedése. Tegyük fel, hogy nem választható ki véges lefedés. Osszuk a téglát 2^k egybevágó darabra (koordinátánkénti felezéssel). (Egy dimenzióban ugye feleztünk, a síkon négy egyforma darabba vágunk, mint Tóth az őrnagy urat stb. – „oroszlánfogás" módszere.) Legalább az egyik darab nem lesz végesen lefedhető (mert különben az egész is végesen fedhető lenne). Azt a darabot tovább osztjuk; és így tovább, ad infinitum. Zárt téglák egy szűkülő sorozatát kapjuk $\Rightarrow$ van kózös pont. A közös pontot lefedi az I_0 nyílt halmaz; mivel ez nyílt, egy elég kicsi téglát is lefed, ami ellentmondás.

Legyen most H általában egy zárt halmaz. Mivel korlátos, belefoglalható egy R tgléba. A nyílt $I\gamma$ halmazok rendszeréhez vegyük hozzá a $J := H^c$ (nyílt) komplementerhalmazt, ez a rendszer lefedi az egész teret, tehát az R-et is. Innen úgy okoskodunk tovább, mint az előző bekezdésben.

Kompakt $\Rightarrow$ Cantor-tétel bizonyítása. Legyen H kompakt, és legyen (A_n) H-beli zárt halmazok egy szűkülő sorozata. Be akarjuk látni, hogy $\bigcap A_n \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy üres a metszet. Tekintsük az $I_n := H \setminus A_n$ nyílt halmazokat. Mivel

$$\bigcup I_n = \bigcup (H \setminus A_n) = H \setminus \left(\bigcap A_n\right) = H,$$

ezek H-t lefedik $\Rightarrow$ kiválasztható véges lefedés. De az $I_1, \ldots, I_N$ csak valamely $H \setminus A_N$ halmazt fednek le, ami ellentmondás.

Kompakt $\Rightarrow$ korlátos bizonyítása. Fedjük le az egész $\mathbb{R}^k$ teret a $[-n, n]^k$ téglákkal. Ezekből véges sok egy korlátos halmaz.

Kompakt $\Rightarrow$ zárt bizonyítása. Legyen $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... egy sorozat, aminek nincs torlódási pontja a kompakt H-ban $\Rightarrow$ az $Y_n := \{\underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \ldots\}$ halmazok zártak és szűkülő sorozatot alkotnak $\Rightarrow$ van közös pontuk; de akkor az torlódási pont lenne.

Folytonos függvények

(Definíciók: Ha $f : D \to R$, akkor az $X \subset D$ halmaz képe $f(X) := \{y : \exists\, x : f(x) = y\} \subset R\}$ és az $Y \subset R$ halmaz ősképe $f^{-1}(Y) := \{x : (x) \in Y\} \subset D$.)

Egyváltozós eset: $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Bev.anal.-ból tudjuk a alábbi tételeket.

31. Tétel. *Egy intervallumon folytonos függvény az $f(x_1)$ és az $f(x_2)$ közötti bármely értéket fölvesz valahol az x_1 és az x_2 között (Bolzano–Darboux-tulajdonság).*

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy „intervallum folytonos képe intervallum”.

32. Tétel. *Kompakt intervallumon (korlátos és zárt) folytonos függvény korlátos (azaz az értékkészlete korlátos).*

33. Tétel. *Kompakt intervallumon (korlátos és zárt) folytonos függvény fel is veszi szélsőértékeit.*

E három tétel együtt azt is jelenti, hogy „zárt intervallum folytonos képe zárt intervallum”.

Többváltozós eset: $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

A (31) tétel ebben a formában nem általánosítható, helyette az $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ esetben

41. Tétel. *Egy összefüggő halmazon folytonos függvény az $f(\underline{x}_1)$ és az $f(\underline{x}_2)$ közötti bármely értéket fölvesz valahol (tehát összefüggő halmaz folytonos képe intervallum).*

Még általánosabban fogalmazva,

41′. Tétel. *Összefüggő halmaz folytonos képe is összefüggő halmaz.*

Ezeket a tételeket most nem bizonyítjuk.

Az $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ többváltozós függvény esetében:

42. Tétel. *Legyen az f többváltozós függvény a $H \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt halmazon (ha úgy tetszik, korlátos és zárt halmazon, ez ugyanaz) folytonos. Ekkor f korlátos (azaz az értékkészlete korlátos).*

43. Tétel. *Legyen az f többváltozós függvény a $H \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt halmazon (ha úgy tetszik, korlátos és zárt halmazon, ez ugyanaz) folytonos. Ekkor az $f(H)$ értékkészlet is zárt halmaz.*

> (42) bizonyítása. Tegyük fel, hogy f nem korlátos, mondjuk felülről. Ekkor az 1, 2, $\ldots$, n, $\ldots$ sem korlátok, tehát léteznek olyan $\underline{x}_n \in H$ pontok, hogy $\forall\, n$: $f(\underline{x}_n) > n$. Mivel H-ban érvényes a B-W tétel, $\exists\,(n_i) :\ \underline{x}_{n_i} \to \underline{x} \in H$ konvergens sorozat. Egyrészt a folytonosság miatt $f(\underline{x}_{n_i}) \to f(\underline{x})$, másrészt $f(\underline{x}_{n_i}) \to \infty$, ami ellentmondás.
>
> (43) bizonyítása. Tegyük fel, hogy az $f(H)$ nem zárt, azaz kivezet belőle a határértékképzés, $\exists\, y_i \to y$ konvergens sorozat úgy, hogy $y_i \in f(H)$, de $y \notin f(H)$. Legyen $\underline{x}_i \in H$ olyan, hogy $f(\underline{x}_i) = y_i$. Mivel H-ban érvényes a B-W tétel, $\exists\,(n_i) :\ \underline{x}_{n_i} \to \underline{x} \in H$ konvergens sorozat. A folytonosság miatt $f(\underline{x}_{n_i}) \to f(\underline{x}) \in H$, ami ellentmondás.

A (42)-(43) tételeket összefoglalhatjuk: *Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.*

Ezt most a $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ esetben bizonyítottuk; a bizonyítás az $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ esetben is hasonló.

Ez az állítás az $\mathbb{R}^k$ tereknél általánosabban is igaz (a kompaktság fogalmához csak a nyílt halmaz fogalma, tehát csak környezetek kellenek). Ha az általános esetben akarjuk bizonyítani, hasznos lehet a folytonosság alábbi jellemzése: egy függvény pontosan akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz ősképe is nyílt.