A feltételes szélsőértékről

3. sillabusz a Többváltozós függvények kurzushoz

Mi az, hogy „sillabusz”? Ez egy olyan iromány, ami segédanyagnak készült. Vázlatos, pontatlan, (szándékoltan) hiányos. Segíti a tanulást, vázlatot, ötleteket ad. Ugyanakkor, egy része a törzsanyagon túlmutat(hat).

A Lagrange-féle multiplikátoros módszer

1. Definíció. Az $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\underline{a} \in \operatorname{int} D$ helyen lokális maximuma van, ha létezik az $\underline{a}$ pontnak olyan $K_{\underline{a}}$ környezete, hogy $\forall\, \underline{x} \in K_{\underline{a}}$ esetén ($f(\underline{x})$ értelmezve van és) $f(\underline{x}) \leq f(a)$.

A lokális szélsőérték létezésére ismerünk szükséges, illetve elégséges feltételeket is.

Gyakran előforduló feladat azonban, hogy nem minden $\underline{x}$ pont érdekel minket, csak azok, amelyek valamely további feltételeknek tesznek eleget („megengedett értékek”).

2. Definíció. Az $f : d \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\underline{a} \in \operatorname{int} D$ helyen a$C \subseteq \mathbb{R}^k$ halmazra nézve feltételes (vagy „relatív”) lokális maximuma van, ha $\underline{a} \in C$ és létezik az $\underline{a}$ pontnak olyan $K_{\underline{a}}$ környezete, hogy $\forall\, \underline{x} \in K_{\underline{a}} \cap C$ esetén ($f(\underline{x})$ értelmezve van és) $f(\underline{x}) \leq f(a)$.

Azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor a C halmazt „egyenletekkel”, azaz nívóhalmazok metszeteként adjuk meg.

1. Példa. Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett. (Feltesszük, hogy f és g síma függvények.)

Szemléletesen arról van szó, hogy az f függvény grafikonján (ami egy hegyes-völgyes felszín) teszünk egy sétát, a $g(x, y) = 0$ egyenlet által meghatározott úton − hol lesz a sétánk (lokálisan) legmagasabb, illetve legalacsonyabb pontja? Mondjuk fölsétálunk a hegyoldalban lévő présházig, aztán lebotorkálunk: a présház a legmagasabb pont, annak ellenére, hogy itt nem „vízszintes” a felszín, nem tűnnek el az f parciális deriváltjai.

1. Megoldás. Készítsük el a felszín térképét, szintvonalakkal, és jelöljük be a sétautat is. Csak ott lehet szélsőértékpont, ahol a sétaút *érinti* a szintvonalat, hiszen ha metszené, a sétaút egyik irányába mozdulva fölfelé, a másik irányban lefelé haladnánk. Tehát az f szintvonala és a g szintvonala (ez a sétaút) érintkeznek. Az érintőre a gradiens merőleges, tehát $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ egy egyenesbe esnek $\Rightarrow \operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$.

2. Megoldás. Világos, hogy ha véletlenűl a séta átmegy egy hegycsúcson (gödrön), akkor éppen ott van a legmagasabb (legalacsonyabb) pontja. De mi van, ha nem megy át a csúcson? Bontsuk el a hegyet, csak arra vigyázva, hogy a sétaút ne változzon meg. Ezt praktikusan úgy tehetjük meg, hogy $\lambda \cdot g$ -nek megfelelően bontjuk el. Ha sikerül ezt úgy megtennünk, hogy a maradék hegy csúcsa a sétaútra kerüljön, nyilván ott lesz a legmagasabb pont. Mivel ez mar „igazi hegycsúcs”, itt a parciális deriváltak eltűnnek, azaz

$$f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0\,, \quad f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g\,.$$

A fenti szemléletes gondolatmenetek bármelyike könnyen általánosítható több változó esetére is.

1. Tétel. *Keressük az $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvény szélsőértékeit a $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ feltétel mellett (most is f és g síma függvények). Ott lehet szélsőérték, ahol a*

$$\varphi(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \lambda \cdot g(\underline{x})$$

függvénynek stacionárius pontja van, azaz

$$\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i: \; f'_{x_i} - \lambda \cdot g'_{x_i} = 0$$

valamely λ számra.

A λ számot *Lagrange-féle multiplikátor*nak nevezzük. Vegyük észre, hogy ez éppen $k+1$ darab egyenlet (k darab a parciális deriváltakból plusz a feltétel maga), így esélyes, hogy meg tudjuk határozni a $k+1$ darab ismeretlent (a szélsőértékhely k darab koordinátáját és a λ-t).

Most nem foglalkozunk a szélsőérték létezésének elegendő feltételeivel. Az „alkalmazásokban" általában egyéb (fizikai, geometriai, …) megfontolásokból úgyis adódik a keresett extrémum jellege, csak a helyére vagyunk kíváncsiak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ feltételből az x_k változó kifejezhető (nyilván mint $k-1$-változós függvény), $x_k = y(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Ez az implicitfüggvény-tétel értelmében megtehető, ha $g'_{x_k} \neq 0$. Ha ez nem teljesül, valamelyik másik változót fejezzük ki. Akkor nem találunk ilyet, ha minden változó szerint $g'_{x_i} = 0$ lenne; ekkor a feltétellel van baj …

Ezt az y függvényt f-be helyettesítve, kapjuk, hogy a

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}) := f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y(x_1, \ldots, x_{k-1}))$$

függvény (közönséges) szélsőértékeit keressük. Ez ott lehet, ahol φ stacionárius, azaz

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}: \quad \varphi'_{x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'_{x_i} + f'_{x_k} y'_{x_i} = 0$$

(összetett fv. deriválási szabálya!). Az implicitfüggvény-tétel szerint

$$y'_{x_i} = -\frac{g'_{x_i}}{g'_{x_k}},$$

ebből

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}: \quad f'_{x_i} - f'_{x_k} \frac{g'_{x_i}}{g'_{x_k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'_{x_i}}{f'_{x_k}} = \frac{g'_{x_i}}{g'_{x_k}} =: \lambda \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g\,.$$

2. Példa. Az $f(x, y, z)$ háromváltozós függvény szélsőértékeit keressük a $g_1(x, y, z) = 0$, $g_2(x, y, z) = 0$ feltételek mellett.

Megoldás. A g_1 és a g_2 nívófelületeinek metszete egy görbevonal, tekintsük a paraméteres alakját. Az $f(x(t), y(t), z(t)) =: \varphi(t)$ akkor extremális, ha

$$\varphi'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t) + f_z \cdot z'(t) = 0\,,$$

azaz a $\operatorname{grad} f$ vektor és az $(x'(t), y'(t), z'(t))$ vektor (ez a görbe érintővektora) merőlegesek. A görbe benne van a g_1 nívófelületében, tehát rá merőleges a $\operatorname{grad} g_1$ vektor; hasonlóan, a $\operatorname{grad} g_2$ vektor is. Nyilván a két gradiensvektor kifeszít egy síkot; ez is merőleges a görbére, és a fentiek szerint a $\operatorname{grad} f$ vektor ebben a síkban kell hogy legyen, azaz

$$\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g_1 + \mu \cdot \operatorname{grad} g_2$$

valamely $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ értékekre.

2. Tétel. *Keressük az $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ függvény szélsőértékeit a $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$, ..., $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$, $n < k$ feltételek mellett (most is f és g_j síma függvények). Ott lehet szélsőérték, ahol a*

$$\varphi(\underline{x}) := f(\underline{x}) - \lambda_1 \cdot g_1(\underline{x}) - \cdots - \lambda_n \cdot g_n(\underline{x})$$

függvénynek stacionárius pontja van, azaz

$$\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} g_j$$

valamely λ_1, ..., λ_n számokra.

Vegyük észre, hogy ez éppen $k+n$ darab egyenlet (k darab a parciális deriváltakból plusz az n feltétel) a $k+n$ darab ismeretlenre (ezek a szélsőértékhely k darab koordinátája és az n darab λ_j paraméter).

Néhány jellegzetes feladat

3. Példa. (A postahivatal feladata) A tégla alakú csomagot mindegyik lapjával párhuzamosan körbe kell kötni, a leghosszabb oldalánál kétszer is. Mekkora legyen egy 36 dm^3 térfogatú csomag, hogy a lehető legrövidebb madzaggal köthessük körbe?

Világos, hogy van ilyen tégla, hiszen az extrém lapos, extrém keskeny stb. téglákhoz extrém hosszú madzag kell. A feltétel $xyz = 36$, a feladat $2x+4y+6z = \min$. A feladat akár „szabad" (kétváltozós) szélsőérték-feladatként ($2x+4y+6\frac{36}{xy} = \min$), akár (háromváltozós) feltételes szélsőérték-feladatként könnyen megoldható.

4. Példa. Tekintsük a felülről nyitott, téglatest alakú kádakat. Adott felszín mellett, melyiknek legnagyobb a térfogata? (Lehet egyváltozós, kétváltozós, háromváltozós feladat, de elemi úton a legegyszerűbb.)

5. Példa. (A belvíz-feladat) Az árok keresztmetszete szimmetrikus, felfelé bővülő trapéz (miért szimmetrikus?), kisalapja x, szára y, a szár hajlásszöge α. Legyen $x + 2y = K$, mikor lesz a keresztmetszet maximális? (a szállított víz mennyisége a keresztmetszettel, míg a burkoláshoz szükséges betonmennyiség a kerülettel arányos.)

Az „egyváltozós" logika szerint először határozzuk meg, adott x és y mellett mekkora szögnél lesz legnagyobb a keresztmetszet. „Kétváltozós" logika: legyenek mondjuk y és α a változók, velük fejezzünk ki mindent. A „feltételes" logika adja a legegyszerűbb számolást.

6. Példa. Határozzuk meg az $y = x^2$ és az $y = 1 - (x+2)^2$ egyenletű parabolák távolságát.

Tudjuk, hogy a két ponthalmazt összekötő szakaszok között van legrövidebb (miért?). Az $(x-u)^2 + (y-v)^2$ minimumát keressük, az $y - x^2 = 0$, $v - 1 + (u+2)^2 = 0$ feltételek mellett.

7. Példa. Az $x^2 + 8xy - 7y^2 = 225$ görbének melyik az origóhoz legközelebbi pontja?

Kanonikus alakra hozva ez egy hiperbola, könnyen paraméterezhető: $y = 5 \operatorname{sh} t$, $x+4y = 15 \operatorname{ch} t$, ezzel egyváltozóssá vált a feladat. Egyszerűbb azonban az adott feltétel mellett x^2+y^2 minimumát keresni Lagrange-multiplikátorral.

8. Példa. Keressük az origóhoz legközelebbi és legtávolabbi pontját az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ és az $x + y = z$ egyenletű alakzatok metszetének (ellipszoid metszete egy síkkal).

9. Példa. Írjunk az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$ ellipszoidba maximális térfogatú téglát.

10. Példa. A $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 12xy + 4xz = 35$ egyenletű felületnek hol van legalacsonyabb vagy legmagasabb pontja? (Tehát $z = \text{extr.}$).

11. Példa. Keressük meg az $x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p$ összeg minimumát ($p > 0$ adott), az $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = K$ feltétel mellett ($x_i \geq 0$).

Ez bizony a hatványközepek közötti egyenlőtlenség.

12. Példa. Keressük meg az $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k$ összeg szélsőértékeit az $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = K$ feltétel mellett (az a_i-k adott számok).

Ez pedig a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

13. Példa. Hol van az $a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$ sík origóhoz legközelebbi pontja? És az $a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$, $b_1x + b_2y + b_3z + b_0 = 0$ síkok metszésvonalának origóhoz legközelebbi pontja?