Neve: ______________________________

Komplex&valós elemei , 2015. 04. 27.

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

A feladatlapot mindenképpen adja be a dolgozattal együtt!

Feladatok

1. Definíció szerint (azaz a nívóhalmazok segítségével) igazolja, hogy ha $f(x)$ mérhető függvény, akkor $f^2(x)$ is mérhető. (4 pont)

2. Számolja ki az integrált (legyen $z := e^{ix}$, $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ és használja a reziduumtételt). (6 pont)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$$

3. Legyen $f(z) := \frac{1}{\sin z}$. Adja meg a függvény szinguláris helyeit, azok típusát és a szinguláris helyekhez tartozó reziduumokat. (5 pont)

4. Adjon meg olyan függvényt a $[0, 1]$ intervallumon, amely Riemann (improprius) értelemben nem integrálható, de Lebesgue értelemben igen, és $\int f(x)\,dx > 0$. (4 pont)

A. Definiálja a *mérhető függvény* fogalmát. (3 pont)

B. Hogyan konstruáltunk *külső mértékből mértéket?* (3 pont)

Jó munkát!

Neve: ______________________________

Komplex&valós elemei , 2015. 04. 27.

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

A feladatlapot mindenképpen adja be a dolgozattal együtt!

Feladatok

1. Definíció szerint (azaz a nívóhalmazok segítségével) igazolja, hogy ha $f(x)$ egy mérhető függvény, akkor $\sin(f(x))$ is mérhető. (4 pont)

2. Számolja ki az integrált (legyen $z := e^{ix}$, $\cos x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ és használja a reziduumtételt). (6 pont)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$$

3. Legyen $f(z) := \frac{1}{\sin z}$. Adja meg a függvény szinguláris helyeit, azok típusát és a szinguláris helyekhez tartozó reziduumokat. (5 pont)

4. Adjon meg olyan függvényt az $[1, \infty)$ intervallumon, amely Riemann (improprius) értelemben nem integrálható, de Lebesgue értelemben igen, és $\int f(x)\,dx > 0$. (4 pont)

A. Milyen műveletekre zárt a *mérhető függvények* halmaza? (3 pont)

B. Definiálja a *külső mérték* fogalmát. (3 pont)

Jó munkát!

Neve: ______________________

Komplex&valós elemei , 2015. 04. 27.

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

A feladatlapot mindenképpen adja be a dolgozattal együtt!

Feladatok

1. Definíció szerint (azaz a nívóhalmazok segítségével) igazolja, hogy ha $f(x)$ mérhető függvény, akkor $f^2(x)$ is mérhető. (4 pont)

2. Számolja ki az integrált (legyen $z := e^{ix}$, $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ és használja a reziduumtételt). (6 pont)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\sin x}$$

3. Legyen $f(z) := \frac{e^z}{1+z^2}$. Adja meg a függvény szinguláris helyeit, azok típusát és a szinguláris helyekhez tartozó reziduumokat. (5 pont)

4. Adjon meg olyan függvényt az $[1, \infty)$ intervallumon, amely Riemann (improprius) értelemben nem integrálható, de Lebesgue értelemben igen, és $\int f(x)\, dx > 0$. (4 pont)

A. Definiálja a *mérhető függvény* fogalmát. (3 pont)

B. Hogyan konstruáltunk *külső mértékből mértéket?* (3 pont)

Jó munkát!