Alkalmazott analízis, 2014. 11. 27.

1. Határozza meg az $f(t) := e^{-a|t|}$ $(a > 0)$ függvény Fourier-transzformáltját. Számolja ki az

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{a^2 + x^2}\, dx$$

integrált. (8 pont)

2. Határozza meg $\widehat{f}$ ismeretében a $t \cdot f(t)$ és a $(\cos at)f(t)$ függvények Fourier-transzformáltjait. Az 1. feladat megoldását felhasználva adja meg a $g(t) := te^{-|t|}$ Fourier-transzformáltját. (8 pont)

3. Igazolja, hogy az integrálható függvények kalapot tudnak cserélni, azaz $f, g \in L(\mathbb{R})$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, dx\,.$$

(Honnan tudjuk, hogy ezek az integrálok egyáltalán léteznek?) (5 pont)

4. Igazolja, hogy

$$\text{ha}\quad f(t) = \int_t^\infty \frac{g(x)}{x}\, dx\,, \quad \text{akkor}\quad F(p) = \frac{1}{p}\int_0^p G(y)\, dy\,,$$

ahol F és G az f, g függvények Laplace-transzformáltja. (8 pont)

5. Oldja meg az

$$y'(t) - y(t) = u(t-3), \quad y(0) = 2$$

differenciálegyenletet Laplace-transzformációval. (Itt u az egységugrás-függvény.) (10 pont)

6. Határozza meg az

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < t < a, \\ 1, & \text{ha } a < t < 2a, \end{cases} \qquad f(t+2a) = f(t)$$

négyszögimpulzus-függvény Laplace-transzformáltját. (7 pont)

7. A. Igazolja, hogy $f \in L(\mathbb{R})$ esetén az $\widehat{f}$ Fourier-transzformált folytonos függvény.

B. Mit jelent az, hogy az f függvény az a helyen Lipschitz-feltételnek tesz eleget? Mit tud a különböző rendű Lipschitz-feltételek, a folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolatáról? $(5+5$ pont$)$

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!