Alkalmazott analízis, 2014. 10. 30.

1. Fejezze ki a gradiensoperátor alakját hengerkoordinátarendszerben. (6 pont)

2. Tekintsük az $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ de.-et. Bizonyítsa a következőket:

a) $H_n(x) := e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ megoldása az egyenletnek és n-edfokú polinom;

b) $H_{n+1}(x) = -2nH_{n-1} - 2xH_n(x)$. (5+5 pont)

3. Legyen $f \in L^2$ egy 2π-periodikus függvény. Igazolja, hogy vannak olyan g_e és g_o függvények, hogy $f = g_e + g_o$, valamint g_e páros és g_o páratlan. Igazolja, hogy

$$\|f\|^2 = \|g_e\|^2 + \|g_o\|^2 ,$$

ahol $\| \cdot \|$ az L^2-norma. Értelmezze az eredményt mint egy Pitagorasz-tételt. (6 pont)

4. a) Legyen $f(t) := |t|$, ha $-\pi \leq t \leq \pi$ és $f(t + 2\pi) = f(t)$. Adja meg a Fourier-sort. Hol konvergens a Fourier-sor?

b) Írja föl a Parseval-formulát. Helyettesítse a $t = \pi/4$ értéket. Határozza meg a az alábbi sorok összegeit:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots ; \quad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \cdots ; \quad \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + - - \cdots$$

(5 + 7 pont)

5. Legyen

$$f(t) := \begin{cases} t, & \text{ha } 0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi, \end{cases} \qquad f(t + 2\pi) = f(t).$$

Adja meg a függvény Fourier-sorát. Hol konvergens a sor, mi az összege? (8 pont)

6. Igazolja, hogy az

$$(t) := \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & \text{ha } 0 < |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{ha } t = 0, \end{cases} \qquad f(t + 2\pi) = f(t)$$

függvény minden pontban Lipschitz-feltételnek tesz eleget. (6 pont)

7. A) Definiálja az *ortonormált rendszer* fogalmát. Mit ért az alatt, hogy az ONR *teljes*?

B) Definiálja a *Dirichlet-magot*, vázlatosan ábrázolja. (4 + 4 pont)

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!