Alkalmazott analízis, 2014. 10. 02.

1. a) Határozza meg a $z = x^2 + y^2$ és a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ közötti térfogatot.

b) Számolja ki:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\, dy\, dx$$

(A gömbi polár trafó Jacobi-determinánsa $-r^2 \sin\theta$.) $(4 + 5$ pont)

2. Tekintsünk egy egyenes kúpot: magassága m, alapkörének sugara R, csúcsa az origó, tengelye az 'x' tengely, Adja meg az S palástfelszín egy $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ paraméteres előállítását (a paramétertartományt is), és az $\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v$ vektort. (6 pont)

3. Legyen az S zárt felület egy test határa, $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pedig harmonikus függvények. Igazolja, hogy

$$\iint_S f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$$

(ahol $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ a felület normálvektora szerinti derivált). (6 pont)

4. Milyen n értékre lesz $r^n \cdot \vec{r} = \operatorname{rot} F$ valamely F vektorfüggvényre? Adja meg az F függvényt (egy origót nem tartalmazó nyílt téglán). (8 pont)

5. Számolja ki az

$$\oint_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$$

integrált, ahol C az $x^2 + y^2 = a^2$ és az $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ felületek metszete. (8 pont)

6. Legyen $\vec{F} := (\frac{\partial \log r}{\partial y}, -\frac{\partial \log r}{\partial x})$ (ahol $r := \sqrt{x^2 + y^2}$); C pedig egy síma zárt görbe az $1 \le r \le 2014$ gyűrűben. Melyek az

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r}$$

integrál lehetséges értékei? (8 pont)

7. A) Definiálja skalárfüggvény *gradiensét* koordinátákkal és koordinátáktól függetlenül is.

B) Definiálja vektorfüggvény *felszín szerinti integrálja* fogalmát. $(4 + 4$ pont)

Ügyeljen a megfelelő indoklásokra, a pontos fogalmazásra, feltételekre. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!