

**4. ÉVKÖZI DOLGOZAT**  
mat. alapszak I. évf., 2007. 05. 02.

**A. Feladatok**

1. Számolja ki az alábbi integrálokat! (7,8,7,8 pont)

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x} & \text{b)} \int_0^1 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}} \\ \text{c)} \int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \, dx & \text{d)} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx \end{array}$$

2. Határozza meg az alábbi primitív függvényeket! (7,8 pont)

$$\text{a)} \int \arctg(1 + \sqrt{x}) \, dx \quad \text{b)} \int \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx$$

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát!
2. Definiálja az adott  $f$  függvény primitív függvénye fogalmát!
3. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
4. Mondja ki a hányadosfüggvény integrálhatóságáról szóló tételt!
5. Mondja ki a függvénysorozat integrálhatóságáról szóló tételt!
6. Definiálja adott függvény alsó integrálközelítő összegeit!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos. Igazolja, hogy

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) \, dx.$$

2. Legyen az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény páratlan. Igaz-e, hogy minden primitív függvénye páros?
3. Integrálható-e a  $[0, 2]$  intervallumon az alábbi függvény:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q-1}{q-2}, & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \text{ ahol } p, q \text{ relatív prím egészek és } q \geq 3, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!