

**3. ÉVKÖZI DOLGOZAT**  
mat. alapszak I. évf., 2007. 03. 12.

**A. Feladatok**

1. Adja meg az  $f(x) := \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x}$  függvény deriváltját! Vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)
2. Adjon meg olyan (minél alacsonyabb fokú) polinomot, amely az  $e^x$  függvényt a  $[-2, 1]$  intervallumon legfeljebb  $10^{-3}$  hibával közelíti! (7 pont)
3. Vizsgálja a  $\frac{\sin(x+1)}{\sin(x+2)}$  függvény monotonitását! Adja meg a függvény értékkészletét! (9 pont)
4. Végezze el az  $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$  függvény teljes diszkusszióját; ábrázolja is a függvényt! (15 pont)
5. Számolja ki a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

határértéket! (6 pont)

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a középérték-tétel Lagrange-féle alakját!
2. Mondja ki a (differenciálható) függvény monoton csökkenése és deriváltja közötti kapcsolatot leíró tételeket (szükséges, ill. elegendő feltételek)!
3. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény differenciálható az  $a \in D_f$  pontban?
4. Mondja ki az összetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
5. Mondja ki a hatványsor tagonkénti differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Definiálja adott függvény (0 körüli) Taylor-sorát!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha az  $f$  függvény differenciálható az  $(\alpha, \beta)$  intervallumon és  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , akkor mindig található olyan  $a, b$ :  $\alpha < a < \xi < b < \beta$  számok, amelyekre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

fennáll?

2. Legyen  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Mit jelent az, hogy az  $f$  függvénynek *nincs* helyi szélsőértéke az  $a \in (\alpha, \beta)$  helyen? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Igaz-e, hogy egy szigorúan növekvő, konvex függvény inverze szükségképpen konkáv? (Feltehetjük, hogy a függvény és inverze (akár kétszer is) differenciálható.)

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!