

2. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat. alapszak I. évf., 2006. 11. 30.

A. Feladatok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? (6 + 6 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$

2. Hol konvergensek az alábbi függvénysorok? (7 + 8 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$

3. Adja meg az $f(x) := \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét; vázlatosan ábrázolja a függvényt! (7 pont)

4. Hol konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^n}{2^{3n}}$ függvénysor? Mi az összege? (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens?
2. Mondja ki a Leibniz-féle konvergenciakritériumot!
3. Mit ért azalatt, hogy az f függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban? (Mindkét definíciót adja meg!)
4. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
5. Mondja ki a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!
6. Definiálja két sor Cauchy-féle szorzatsorát!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Adjon példát két nem folytonos függvényre, melyek összetétele folytonos!
2. Legyen az f_n függvénysorozat konvergens az $[a, b]$ intervallumon. Mit jelent az, hogy *nem* egyenletesen konvergens? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Adjon példákat olyan sorokra, amelyekre $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ és a $\sum a_n$ sor konvergens, illetve divergens!
4. Van-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ sornak olyan átrendezése, amelynek az összege 2006?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!