1. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat. alapszak I. évf., 2006. 10. 12.

A. Feladatok

1. Vizsgálja az

$$a_n := \frac{n^2+4}{3n^2+1}$$

sorozatot: monoton-e? korlátos-e? konvergens-e? Adja meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékét! (8 pont)

2. Adja meg az alábbi sorozatok határértékét: (6 + 6 + 7 pont)

a) $\sqrt{n^2+8n-3} - \sqrt{n^2+3n+8}$ b) $\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(2n+1)^3+(2n+1)^2}$ c) $\sqrt[n]{\dfrac{n^3-n+3}{2n-7}}$

3. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^n \to \infty \text{ ! } \quad \text{(8 pont)}$$

4. Igazolja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} \text{ ! } \quad \text{(7 pont)}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy egy számhalmaz alulról korlátos?
2. Mit jelent az, hogy $a_n \to a$? (Az ε-os és a környezetes definíciót is adja meg!)
3. Definiálja az adott f függvény inverzét!
4. Mondja ki a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
5. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
6. Mondja ki a konvergens sorozatokról szóló második egyenlőtlenségi tételt (amelyikben azt tesszük föl, hogy $a > b$).

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Legyen $x_0 := 1$, $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$. Korlátos-e ez a sorozat?
2. Mit jelent az, hogy egy számsorozat *nem* monoton csökkenő? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Adott két konvergens sorozat, $a_n \to a$, $b_n \to b$, és tudjuk, hogy van olyan ν, hogy minden $n > \nu$ értékre $a_n < b_n$. Lehetséges-e, hogy $a \ge b$?
4. Lehet-e a) egy konvergens és egy nem konvergens; b) két nem konvergens sorozat összege konvergens?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!