

8. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2006. 04. 24.

A. Feladatok

1. Keresse meg az $2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 + 1$ függvény szélsőértékeit! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat! (8 + 9 pont)
 - a) $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$, ahol L az $x^2 + y^2 = 1$ egységkör pozitív irányításban
 - b) $\int_L \left(\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x \right) dx + \left(\frac{y}{(y - x)^2} - y^2 \right) dy$, itt L az $y = x^2$, $2 \leq x \leq 4$ parabolaív
3. Határozza meg az $f(x, y) := x^2 + 2xy - 4x + 8y$ függvénynek a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ téglalapon felvett legnagyobb és legkisebb értékeit! (10 pont)
4. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) y' = 0$ differenciálegyenletet! (9 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségének szükséges és elegendő feltételét! (amelyikben parciális deriváltak szerepelnek)
2. Mit ért az alatt, hogy az $ax^2 + 2bxy + cy^2$ kvadratikus forma negatív definit?
3. Mondja ki a Jordan-tételt!
4. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt!
5. Definiálja a $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény G görbe menti x koordináta szerinti vonalmenti integrálját! (P folytonos és G rektifikálható.)
6. Definiálja a sík egy részhalmazának n -edik belső sokszögét!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Adjon feltételt arra, mikor van egy differenciálegyenletnek $\mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$ alakú (azaz csak $\frac{x}{y}$ -től függő) integráló tényezője!
2. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazolja, hogy

$$\int_K f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0,$$

ahol K a sík bármely (zárt) körvonala!

3. Mutasson példát arra, hogy végtelen sok Jordan-mérhető halmaz metszete nem feltétlenül Jordan-mérhető!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!