

**7. ÉVKÖZI DOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2006. 03. 09.

**A. Feladatok**

1. Ábrázolja az  $\arcsin \sqrt{2x^2 - y^2}$  függvényt szintvonalalaival és jellegzetes metszeteivel! (7 pont)
2. Legyen  $f(x, y) := \arctg \frac{y}{x}$ , adja meg az  $f''_{xx} + f''_{yy}$  függvényt! (7 pont)
3. Tekintsük az  $\mathbb{R}^2$  síkon az  $r = e^{-\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi$  poláregyenletet kielégítő pontok halmazát! Korlátos-e? Nyílt-e? Zárt-e? (8 pont)
4. Határozza meg az alábbi függvények határértékét az origóban (ha léteznek)! (7 + 8 pont)

a)  $\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$       b)  $\frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^4}$

5. Hol differenciálható totálisan az  $f(x, y) := \sqrt[4]{x^4 + y^4}$  függvény? (8 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Definiálja az ( $L$  lineáris téren értelmezett) skaláris szorzat fogalmát!
2. Mit ért az alatt, hogy az  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -változós függvény az  $x_2$  változó szerint parciálisan differenciálható az  $A \in \mathbb{R}^k$  pontban?
3. Mondja ki a Cantor-tételt (egymásba skatulyázott zárt halmazok)!
4. Mondja ki a koordinátánkénti konvergencia tételét!
5. Mondja ki a körlánc tételét!
6. Mondja ki a Young tételét!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Legyen minden  $n$ -re az  $A_n$  zárt halmaz. Mit állíthatunk az  $\bigcup_n A_n$  és  $\bigcap_n A_n$  halmazok zártságáról?
2. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} x, & \text{ha } y \text{ racionális,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Léteznek-e az alábbi határértékek:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0, x \text{ rögz.}} f(x, y) \right); \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0, y \text{ rögz.}} f(x, y) \right);$$

3. Legyen  $S$  tetszőleges nemüres halmaz. Igazolja, hogy

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y, \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

távolságfüggvény! Igazolja, hogy  $S$  minden részhalmaza nyílt halmaz!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!