6. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2005. 12. 01.

A. Feladatok

1. Konvergensek-e az alábbi sorok? (5 + 7 + 8 pont)

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n+1} \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n}$$

2. Hol konvergensek az alábbi függvénysorok? (8 + 9 pont)

$$\text{a)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n} \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$$

3. Legyen $f_n(x) := e^{n(x+1)}$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Adjon meg minél bővebb intervallumot, ahol a konvergencia egyenletes! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
2. Mit ért azalatt, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens?
3. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) majoráns kritériumot!
4. Mondja ki a függvénysorozat tagonkénti integrálhatóságáról szóló tételt!
5. Mondja ki a (numerikus) sorok abszolút konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!
6. Mondja ki a Leibnitz-féle konvergenciakritériumot!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Az a_n sorozat tagjai legyenek az $x = \operatorname{tg} x$ egyenlet pozitív megoldásai (növekedő sorrendben). Konvergens-e a $\sum (a_n)^{-2}$ sor?

2. Igaz-e, hogy ha minden n-re $a_n \geq 0$ és a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor szükségképpen $na_n \to 0$?

3. Legyen $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén (tehát az f_n konvergens függvénysorozat). Fogalmazza meg (pozitív állító formában), mit jelent az, ha a konvergencia *nem* egyenletes az $[a, b]$-n!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!