

**5. ÉVKÖZI DOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2005. 10. 13.

**A. Feladatok**

1. Számolja ki az alábbi integrálokat! (7 + 7 + 6 pont)

a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$     b)  $\int_1^{16} \arctg \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$     c)  $\int_0^1 x \log x dx$

2. Oldja meg a  $3y^2 + 3xy + x^2 = (x^2 + 2xy)y'$  differenciálegyenletet! (8 pont)
3. Az  $5y^3 = x^2$  egyenletű görbének az  $x^2 + y^2 = 6$  körbe eső ívét megforgatjuk az  $x$  tengely körül. Mekkora az így kapott test térfogata? (9 pont)
4. Számolja ki az  $r = \sqrt{\cos 3\varphi}$  (polár) egyenletű görbe által határolt zárt síkrész területét! (8 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

- Definiálja a polárkoordinátarendszert! Hogyan kaphatók meg a polárkoordinátákból a derékszögű koordináták?
- Mit ért az alatt, hogy egy síkgörbe rektifikálható?
- Definiálja egy (függvénygörbe forgatásakor kapott) forgástest térfogatát!
- Fogalmazza meg az ívhossz „folytonossági” tulajdonságát!
- Mit ért „iránymező” alatt?
- Hogyan kaphatók meg egy szeparálható differenciálegyenlet megoldásai?

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

- Tekintsük az  $r = e^\varphi$  poláregyenletű (spirál) görbét. Mutassuk meg, hogy a görbe origó körüli  $\alpha$  szögű elforgatása ugyanaz, mint ha (középpontosan) nagyítanánk!
- A  $p$  paraméter mely értékeire létezik az

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^p} dx$$

integrál?

- Legyen  $f$  a  $[0, 1]$ -en folytonos. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!