

4. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2005. 04. 28.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét! (6 + 6 + 7 + 8 + 9 pont)

a) $\frac{5x+4}{(x-2)^3}$ b) $\frac{1}{\cos^4 x}$ c) $x^2 \sin^2 x$ d) $\sqrt{x^2 - 6x - 7}$ e) $\frac{\sin x}{\cos x \sqrt{2 + \sin^2 x}}$

2. Adjon meg rekurzív formulát az

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n}$$

kiszámítására! (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Definiálja egy adott függvény felső integrálközelítő összegeit!
2. Mondja ki a Newton–Leibnitz-féle formulát!
3. Mondja ki a függvény abszolút értékének integrálhatóságáról szóló tételt és egyenlőtlenséget!
4. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
5. Mondja ki a helyettesítéses integrálás formuláját (mindkét alakban, tehát a primitív függvényről és a Riemann-integrálról szólót is)!
6. Mit ért az alatt, hogy az f függvény primitiválható az (a, b) intervallumon?

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Az f függvényről tudjuk, hogy $(-R, R)$ -en folytonos és páratlan. Igaz-e, hogy minden primitív függvénye páros?
2. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q+1}{q+2}, & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \text{ relatív prím egészek és } q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e f az $[1, 2]$ -on?

3. Legyen az f függvény korlátos $[0, 1]$ -en és B_n egy olyan beosztás-sorozat, hogy minden n esetén

$$\bar{s}(f, B_n) - \underline{s}(f, B_n) \geq 1/2005.$$

Lehet-e az f integrálható?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!