

2. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2004. 12. 02.

A. Feladatok

- Határozza meg az $f(x) := \arcsin(2 - x) + \log_{\sqrt{5}} \frac{x+2}{x-2}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)
- Legyen $f(x) := \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. a) Határozza meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet! b) Mutassa meg, hogy a függvény invertálható! c) Adja meg az f inverzfüggvényét (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! d) Ábrázolja az $f(f^{-1})$ és az $f^{-1}(f)$ függvényeket! (10 pont)
- Számolja ki az alábbi határértékeket: (5 + 9 pont)

$$\text{a) } \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x - x}} \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{b) } (\cos x + \sin 2x)^{1/x} \quad (x \rightarrow 0)$$

- Legyen

$$f(x) := \frac{2^{1/x}}{\sqrt{x^2 + 1} - x}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (12 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

- Mit jelent az, hogy az f függvény jobbról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mit jelent az, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú a $\langle a, b \rangle$ intervallumon? (Az $\langle a, b \rangle$ intervallum lehet nyílt vagy zárt is.)
- Mit ért azalatt, hogy egy függvény szigorúan csökkenő?
- Mit jelent az, hogy az f függvény határértéke a $-\infty$ -ben l ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!
- Definiálja az $\arccos x$ függvényt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

- a) Lehet-e két nem folytonos folytonos függvény összege és szorzata is (egyszerre) folytonos? b) Lehet-e két nem folytonos folytonos függvény összege és különbsége is (egyszerre) folytonos?
- Mit jelent az, hogy egy függvény *nem* egyenletesen folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon? (Feltesszük, hogy $\langle a, b \rangle \subseteq D_f$.) (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
- Egy f függvényről tudjuk, hogy \mathbb{R} -en értelmezett és folytonos, továbbá azt, hogy $f(x) \rightarrow 2004$, ha $|x| \rightarrow \infty$. Igaz-e, hogy f szükségképpen korlátos (az egész \mathbb{R} -en)?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!