

1. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2004. 10. 14.

A. Feladatok

1. Vizsgálja az

$$a_n := \frac{2n^2 - 5}{n^2 + 1}$$

sorozatot: monoton-e? korlátos-e? konvergens-e? Adja meg $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékét! (8 pont)

2. Adja meg az alábbi sorozatok határértékét: (7 + 6 + 8 pont)

a) $\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 2n + 3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 - 1}}{n + \sin n}$ c) $\sqrt[n]{\frac{5^n - n3^n + 2^n}{2n^2 - n}}$

3. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy

$$\left(\frac{3n+7}{n+5}\right)^n \rightarrow \infty! \quad (9 \text{ pont})$$

4. Igazolja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}! \quad (7 \text{ pont})$$

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Definíálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
2. Mit jelent az, hogy $a_n \rightarrow a$? (Az ε -os és a környezetes definíciót is adja meg!)
3. Definíálja két függvény összetételét!
4. Mit jelent az, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő?
5. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
6. Mondja ki a rendőr-elvet!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Egy a_n sorozatról tudjuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan ν , hogy bármely $n > \nu$ értékre $|a_{2n} - a_n| < \varepsilon$. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?
2. Mit jelent az, hogy egy számsorozat *nem* korlátos alulról? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Vizsgálja a

$$\frac{2^n + (-2)^n}{p^n}$$

sorozat konvergenciáját (ahol $p > 0$ paraméter)!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!