

8. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2004. 04. 20.

A. Feladatok

1. Keresse meg az $e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ függvény szélsőértékeit! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat! (10 + 8 + 10 pont)
 - a) $\int_L \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$, itt L az $y = \pi + \sin \pi x$, $1 \leq x \leq 2$ görbeív
 - b) $\int_L (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, itt L a $(-2, -1)$ pontból a $(3, 0)$ pontba vezető egyenes szakasz
 - c) $\int_L \arctg \frac{y}{x} dy - dx$, itt L az $y = x^2$ és az $y = x$ egyenletű görbék által határolt (korlátos) parabolaszélet kerülete pozitív irányításban
3. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $x^2 + y^2 + 1 = 2xy y'$ differenciálegyenletet! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a vonalmenti integrál útfüggetlenségének szükséges és elegendő feltételét! (amelyikben parciális deriváltak szerepelnek)
2. Mit ért az alatt, hogy az $ax^2 + 2bxy + cy^2$ kvadratikus forma indefinit?
3. Mondja ki a kétváltozós függvény szélsőértékének létezésére vonatkozó elegendő feltételt!
4. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt!
5. Mikor található egy differenciálegyenlethez csak y -től függő integráló tényező?
6. Definiálja a sík egy részhalmazának n -edik külső sokszögét!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Vannak-e az $x^2y^3(6 - x - y)$ függvénynek (szigorú vagy nem szigorú) szélsőértékei a tengelyeken?
2. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igazolja, hogy

$$\int_K f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0,$$

ahol K a sík bármely (zárt) körvonala!

3. Határozza meg az $e^{x^2+y^2}(2x^2 + 3y^2)$ függvénynek az $x^2 + y^2 \leq 4$ körlapon felvett legnagyobb és legkisebb értékét!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!