

## 7. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2004. 03. 09.

### A. Feladatok

1. Totálisan differenciálható-e az origóban az  $f(x, y) := \sqrt[3]{xy}$  függvény? (9 pont)
2. Legyen  $f(x, y) := xy + xe^{y/x}$ . Adja meg a  $g(x, y) := x \cdot f'_x + y \cdot f'_y - f$  függvényt! (7 pont)
3. Tekintsük az  $\mathbb{R}^2$  síkon az  $r = e^\varphi$ ,  $\varphi \leq 0$  poláregyenletnek eleget tevő pontok halmazát. Vizsgálja ezt a halmazt korlátosság, nyíltság, zártság szempontjából! (7 pont)
4. Vázlatosan ábrázolja az

$$f(x, y) := \arcsin \frac{x}{y^2}$$

függvény értelmezési tartományát és szintvonalait! Hol folytonos a függvény? (8 pont)

5. Számolja ki az alábbi határértékeket (ha léteznek): (6 + 8 pont)

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x + x^2 \sin y}{xy} \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{-1}{x^2 + y^2}}$$

### B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos az  $A \in D_f$  pontban? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mit jelent az, hogy az  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  függvény parciálisan differenciálható az az  $x_n$  változója szerint az  $A \in D_f$  pontban?
3. Hogyan számolható ki az irány szerinti derivált totálisan differenciálható függvény esetén?
4. Mondja ki a Young tételt!
5. Mondja ki a Taylor-formulát kétváltozós függvényre! (Elég az  $n = 2$  eset, tehát a hibtag harmadfokú.)
6. Definiálja a skaláris szorzat fogalmát!

### C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Az adott  $[a, b]$  korlátos zárt intervallumon folytonos függvények halmazán normát definiál-e az

$$\|f\| := \int_a^b |f(x)| dx$$

formula?

2. Igaz-e, hogy ha  $\sum a_n^2$  konvergens sor, akkor a  $\sum \frac{a_n}{n}$  sor is szükségképpen konvergens?
3. Legyen minden  $n$ -re  $A_n$  nyílt halmaz. Mit állíthatunk az  $\bigcup A_n$ , illetve a  $\bigcap A_n$  halmazok nyíltságáról?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!