6. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2003. 11. 28.

A. Feladatok

1. Mi az összege az alábbi sornak ? (5 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok? (5 + 5 pont)

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$$

3. Hol konvergensek az alábbi hatványsorok? (7 + 7 pont)

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n+1} 3^n x^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

4. Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

hatványsor? Mi az összege? (8 pont)

5. Legyen $f_n(x) := e^{n(x-1)}$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Hol egyenletesen konvergens? (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
2. Mit jelent az, hogy az f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergens?
3. Mondja ki a gyökkritériumot!
4. Definiálja két adott sor Cauchy-szorzatát!
5. Mondja ki a konvergens numerikus sorral majorált függvénysor konvergenciájáról szóló tételt!
6. Mondja ki a Dirichlet-féle konvergenciakritériumot!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. A p (valós) paraméter mely értékeire konvergens az alábbi sor?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$$

2. Igaz-e, hogy ha $\sum a_n$ konvergens sor, akkor a $\sum a_n^2$ sor is szükségképpen konvergens? Igaz-e a fenti állítás, ha azt is föltesszük, hogy $\forall\, n : a_n \geq 0$?

3. Hol konvergens az

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + + - - \ldots$$

hatványsor? Mi az összege?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!