

**4. ÉVKÖZI DOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2003. 04. 24.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét! (8 + 9 + 10 + 12 pont)

a)  $\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}$     b)  $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$     c)  $x \arccos x^2$     d)  $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}}$

2. Adjon meg rekurzív formulát az

$$\int x^n e^{-x} dx$$

kiszámítására! (6 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Definiálja egy adott függvény alsó integrálközelítő összegeit!
2. Mondja ki a Newton–Leibnitz-féle formulát (az első alakban, tehát amelyben  $f$  integrálhatóságát tettük föl)!
3. Mondja ki a integrálható függvények hányadosának integrálhatóságáról szóló tételt!
4. Mondja ki a Darboux tételt!
5. Mondja ki a parciális integrálás formuláját (mindkét alakban, tehát a primitív függvényről és a Riemann-integrálról szólót is)!
6. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény primitíválható az  $(a, b)$  intervallumon?

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Az  $f$  függvényről tudjuk, hogy  $[a, b]$ -n korlátos és alsó összegeinek alsó határa megegyezik felső összegeinek felső határával. Igaz-e, hogy  $f$  az  $[a, b]$ -n szükségképpen integrálható?
2. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{q}{q+1}, & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \text{ relatív prím egészek és } q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e  $f$  az  $[1, 2]$ -on?

3. Adjon meg olyan függvényt, amely az  $x - |x - 3|$  primitív függvénye az egész  $\mathbb{R}$ -en!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos *képletgyűjtemény*.

Jó munkát!