

2. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2002. 11. 28.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $f(x) := \arcsin \frac{1}{|x|} + \log_2(5 - x^2)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)

2. Legyen $f(x) := \frac{x^2+3x}{x^2-5x}$. a) Ábrázolja a függvényt! b) Adjon meg olyan minél bővebb tartományt, amelyen f invertálható! c) Adja meg ezen az intervallumon az f inverzfüggvényét (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! d) Ábrázolja az $f(f^{-1})$ és az $f^{-1}(f)$ függvényeket! (14 pont)

3. Számolja ki az alábbi határértékeket: (5 + 6 pont)

$$\text{a) } \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \quad (x \rightarrow 0) \quad \text{b) } x^{4/3} - (x^2-1)^{2/3} \quad (x \rightarrow \infty)$$

4. Legyen

$$f(x) := \frac{\arctg \frac{1}{x-4}}{x + \sqrt{x}}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $\langle a, b \rangle$ intervallumon? (Az $\langle a, b \rangle$ intervallum lehet nyílt vagy zárt is.)
2. Mit jelent az, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az (a, b) intervallumon?
3. Mondja ki a korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátosságáról szóló tételt!
4. Mit jelent az, hogy az f függvény jobboldali határértéke az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Mondja ki az (a, b) intervallumon szigorúan monoton növekedő és folytonos függvény inverzéről szóló tételt!
6. Definiálja az $\arcsin x$ függvényt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Lehet-e egy folytonos és egy nem folytonos függvény szorzata folytonos?
2. Mit jelent az, hogy egy függvény *nem* folytonos az $a \in D_f$ pontban? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg, „ ε -os” alakban!)
3. Igaz-e, hogy ha egy függvény invertálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor ott szükségképpen szigorúan monoton?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!