

8. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2002. 04. 18.

A. Feladatok

1. Mi az összege az alábbi sornak? (5 pont)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - n - 2}{n^4 - 5n^2 + 4}$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok? (5 + 5 pont)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

3. Hol konvergensek az alábbi hatványsorok? (6 + 7 pont)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \log n}$

4. Igazolja, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sor konvergens, de nem abszolút konvergens! (8 pont)

5. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ hatványsor? Mi az összege? (9 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!
2. Mit jelent az, hogy az f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergens?
3. Mi a kapcsolat az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (komplex) függvény, valamint valós és képzetes része adott pontbeli differenciálhatósága között?
4. Mit tud egy (pozitív konvergenciasugarú) hatványsor összegének differenciálhatóságáról?
5. Definiálja a (komplex) $\log^* z$ függvényt!
6. Mondja ki a Dirichlet-féle konvergenciakritériumot!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. A p (valós) paraméter mely értékeire konvergens az alábbi sor?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$$

2. Igaz-e, hogy ha $\forall n : a_n \geq 0$ és a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $na_n \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$?

3. Legyen $f_n(x) := nx^n$ a $[0, 1]$ -en értelmezett függvénysorozat. Folytonos-e, ill. integrálható-e a határfüggvénye a $[0, 1]$ -en? Igaz-e, hogy $\lim (\int_0^1 f_n) = \int_0^1 (\lim f_n)$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!