7. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2002. 03. 14.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := x^4 + y^4 - x^2 - xy - y^2$ függvény szélsőértékeit! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat: $(6+6$ pont$)$

$$\text{a)} \quad \int_G \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}, \quad G: \ x = \cos^3\varphi, \ y = \sin^3\varphi, \ 0 \le \varphi \le \pi/2$$

$$\text{b)} \quad \int_L (2-y)\,dx + x\,dy, \quad L: \ x = t - \sin t, \ y = 1 - \cos t, \ 0 \le t \le 2\pi$$

3. Ábrázolja az integrációs tartományt, és számolja ki az alábbi kettős integrálokat: $(7+5$ pont$)$

$$\text{a)} \quad \iint_H \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dx\,dy, \quad H: \ (x-1)^2 + y^2 \le 1$$

$$\text{b)} \quad \iint_T \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy, \quad T: \ 1 \le x^2 + y^2 \le 9, \ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x$$

4. Számolja ki az alábbi kettős integrált! Ábrázolja a tartományt, és cserélje föl az integrálási sorrendet! (8 pont)

$$\int_0^2 \left(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(2-x)(x-y)}} \right) dx$$

5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $x^2 + y - xy' = 0$ differenciálegyenletet! (6 pont)

B. Definíciók, tételek $(6 \times 4$ pont$)$

1. Mit jelent az, hogy egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz Jordan szerint mérhető?
2. Mondja ki a Jordan-tételt!
3. Mondja ki a szukszcesszív integrálásra vonatkozó tételt!
4. Definiálja egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz beosztását és mondja ki a kettős integrálra vonatkozó Darboux-tételt!
5. Mondja ki a gyökkritériumot! (A $\overline{\lim}$-os és a limest nem tartalmazó alakban is!)
6. Mondja ki Cauchy ekvikonvergencia-tételét!

C. További kérdések $(3 \times 7$ pont$)$

1. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrálható a $[0,1]^2$ négyzeten, akkor $\forall x \in [0,1]$ esetén létezik az $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ integál?

2. Tekintsük a

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy \right) dx, \quad 0 < a < b, \ 0 < \alpha < \beta$$

integrált. Transzformálja az integrációs tartományt téglalappá! Mi lesz a transzformáció Jacobi-determinánsa?

3. Igaz-e, hogy ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\sum a_n^2$ is konvergens? Igaz-e az állítás, ha azt is tudjuk, hogy $a_n \ge 0$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!