6. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2001. 11. 29.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x,y) := \arccos\sqrt{x^2-2y^2}$. Ábrázolja a függvény értelmezési tartományát! Ábrázolja a függvényt szintvonalak, jellegzetes metszetek segítségével! (8 pont)

2. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket: $(10+8+6$ pont$)$

$$\text{a)}\quad xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y \qquad \text{b)}\quad xy' = 2(y-\sqrt{xy}) \qquad \text{c)}\quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

3. Számolja ki az alábbi határértékeket (ha léteznek) $(8+5$ pont$)$

$$\text{a)}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \qquad \text{b)}\quad \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{1}{x-y}$$

B. Definíciók, tételek

$(6\times 4$ pont$)$

1. Definiálja egy ponthalmaz torlódási pontja fogalmát!
2. Mit jelent az, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény az (a,b) pontban totálisan differenciálható?
3. Mit jelent az, hogy az $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ függvény az $A\in\mathbb{R}^k$ pontban folytonos? (Mindkét definíciót adja meg!)
4. Definiálja az (L lineáris téren értelmezett) skaláris szorzat fogalmát!
5. Mondja ki az $A_n\in\mathbb{R}^k$ pontsorozatokra vonatkozó koordinátánkénti konvergencia tételt!
6. Mit jelent az, hogy egy H ponthalmaz korlátos és zárt? ($H\subseteq S$, ahol S egy topologikus tér.)

C. További kérdések

$(3\times 7$ pont$)$

1. Igaz-e, hogy nyílt halmazok uniója mindig nyílt? Adjon példát arra, hogy végtelen sok nyílt halmaz metszete lehet zárt!
2. Hol differenciálható parciálisan az $f(x,y) := \sqrt[4]{x^4+y^4}$ függvény?
3. Igaz-e, hogy ha egy ha egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény minden irány szerinti deriváltja és mindkét változója szerinti parciális deriváltja 0 valamely (a,b) pontban, akkor ott a függvény szükségképpen folytonos?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!