

4. ÉVKÖZI DOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2001. 04. 26.

A. Feladatok

1. Becsülje (minél pontosabban) az

$$x \leq \frac{1}{2} \text{ esetén } \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

közelítő formula hibáját! (10 pont)

Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét:

2. $x \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$ (11 pont)

3. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}$ (12 pont)

4. $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$ (12 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Definiálja az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálfüggvényét!
2. Definiálja egy adott függvény alsó integrálközelítő összegeit!
3. Mondja ki a Darboux tételt!
4. Mondja ki a Newton–Leibniz formulát (az I. alakban, tehát amelyikben f integrálhatóságát tettük fel)!
5. Mondja ki az integrálható függvények hányadosáról szóló tételt!
6. Mondja ki a helyettesítéses integrálás formuláját (mindkét alakot, tehát a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozót is)!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Legyen az f függvény korlátos $[a, b]$ -n, és tudjuk azt is, hogy alsó összegeinek alsó határa megegyezik felső összegeinek felső határával. Igaz-e, hogy f az $[a, b]$ -n szükségképpen integrálható?
2. Adjon példát integrálható, de nem primitiválható függvényre!
3. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} q/(q+1), & \text{ha } x = p/q, \text{ ahol } p, q \text{ egészek, } (p, q) = 1 \text{ és } q > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Integrálható-e f az $[1, 2]$ -n?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!