

2. ÉVKÖZI DOLGOZAT

mat.tanár szak I. évf., 2000. 12. 01.

A. Feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x) := \sqrt{\log_3 \frac{1+x}{x-1}}$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)

2. Legyen $f(x) := \sin^2 x$. a) Ábrázolja a függvényt! b) Adjon meg olyan D_f értelmezési tartományt, amelyen f invertálható! (D_f minél bővebb zárt intervallum legyen.) c) Adja meg ezen az intervallumon az f inverzfüggvényét (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (11 pont)

3. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 7 pont)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{2/x}$$

4. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\frac{1}{2} - 2^{1/x}}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Adja meg a jellegzetes limeseket! (13 pont)

B. Definíciók, tételek

(6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény folytonos az a helyen? (Az “ ε -os” és a “sorozatos” definíciót is adja meg!)
2. Mit jelent az, hogy az f függvény Bolzano–Darboux tulajdonságú az (a, b) intervallumon?
3. Mit jelent az, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon alulról korlátos?
4. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Definiálja az a^x ($a > 0$) függvényt!
6. Definiálja az $\arccos x$ függvényt!

C. További kérdések

(3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha az f függvény a $[0, \infty)$ -en folytonos és alulról nem korlátos, akkor szükségképpen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$?
2. Mit jelent az, hogy egy függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subseteq D_f$ intervallumon? (Pozitív, állító formában fogalmazza meg!)
3. Igaz-e, hogy ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$, akkor a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ állítások közül legalább az egyik igaz?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók.

Jó munkát!