

Név: .....

Vizsgáztató neve: .....

2008. december 29.

### Vizsgadolgozat

(Mat. alapszak)

Bevezetés az analízisbe

(Emelt szintű vizsga)

#### A. Feladatok

1. Adja meg az  $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2x\right)$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. Adjon meg olyan intervallumot, ahol a függvény invertálható és adja meg az inverz-függvényt! (11 p)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$ ;      b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$  (6p+7p)

3. Konvergens-e az alábbi sor? Vizsgálja az abszolút konvergenciát is.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n - n^2}$$

(10 p)

4. Határozza meg a következő függvénysorozat konvergencia-tartományát és határfüggvényét:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

Adjon meg olyan intervallumot, ahol egyenletes a konvergencia. (11 p)

**45 p**

(Legalább 12 pontot el kell érni!)

#### B. Definíciók, tételek

1. Definiálja, hogy mit ért azon, hogy egy  $f$  függvénynek az  $x_0$  pontban a határértéke a  $c$  szám (mindkét definíciót adja meg!) (4 p)
2. Mondja ki a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot. (4 p)
3. Definiálja azt, hogy egy  $f$  függvény egyenletesen folytonos egy  $I$  intervallumon. (4 p)
4. Mondja ki a számsorok konvergenciájára vonatkozó hányados kritériumot. (két alak elegendő) (4 p)
5. Fogalmazza meg a konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tételt. (4 p)
6. Mit ért  $\log_a b$ -n? (4 p)

**24 p**

(Legalább 14 pontot el kell érni)

#### C. Elméleti kérdések

1. Igaz-e, hogy ha  $f$  folytonos a  $(0, 1)$  nyitott intervallumon, akkor ott szükségképpen felveszi szélsőértékeit? (3 p)
2. Ha egy  $\{a_n\}$  sorozatra teljesül, hogy  $a_n - a_{n-1} \rightarrow 0$ , akkor következik-e, hogy  $a_n$  konvergens? (4 p)
3. Tudjuk az  $f$  függvényről, hogy  $f(x) \geq 0$ , ha  $x \in [0, \infty)$ , továbbá folytonos a  $[0, \infty)$ -en és szigorúan monoton növvő. Igaz-e, hogy akkor  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . (7 p)
4. Mutassa meg, hogy ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus és  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , akkor  $f \equiv 0$ .

(7 p)  
21 p  
 $\Sigma$  90 p

**Jó munkát!**

33 → 2  
47 → 3  
61 → 4  
75 → 5