

Név:

Vizsgáztató neve:

2008. december 29.

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
Bevezetés az analízisbe

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2x\right)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. (10 p)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket:
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$ (6p+10p)
3. Konvergens-e az alábbi sor? Vizsgálja az abszolút konvergenciát is.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$$

(9 p)

4. Határozza meg a következő függvénysorozat konvergencia-tartományát és határfüggvényét:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$

(10 p)

45 p

(Legalább 12 pontot el kell érni!)

B. Definíciók, tételek

1. Definiálja, hogy mit ért azon, hogy egy f függvénynek az x_0 pontban a határértéke a c szám (mindkét definíciót adja meg!) (4 p)
2. Mondja ki a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-kritériumot. (4 p)
3. Definiálja azt, hogy egy f függvény egyenletesen folytonos egy I intervallumon. (4 p)
4. Mondja ki a számsorok konvergenciájára vonatkozó hányados kritériumot. (két alak elegendő) (4 p)
5. Fogalmazza meg a konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tételt. (4 p)
6. Mit ért $\log_a b$ -n? (4 p)

24 p

(Legalább 14 pontot el kell érni)

C. Elméleti kérdések

1. Igaz-e, hogy ha f folytonos a $(0, 1)$ nyitott intervallumon, akkor ott szükségképpen felveszi szélsőértékeit? (3 p)
2. Ha egy $\{a_n\}$ sorozatra teljesül, hogy $a_n - a_{n-1} \rightarrow 0$, akkor következik-e, hogy a_n konvergens? (4 p)
3. Tudjuk az f függvényről, hogy $f(x) \geq 0$, ha $x \in [0, \infty)$, továbbá folytonos a $[0, \infty)$ -en és szigorúan monoton növekvő. Igaz-e, hogy akkor $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. (7 p)
4. Mutassa meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, akkor $f \equiv 0$. (7 p)

21 p

Σ 90 p

Jó munkát!

33 → 2

47 → 3

61 → 4

75 → 5