

**Vizsgadolgozat**  
**(Mat. alapszak)**  
**(emelt szintű vizsga)**  
**Bevezetés az analízisbe**

Név: .....

Vizsgáztató neve: .....

**A) Feladatok**

1. Adja meg a  $\sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Adjon meg (minél több) olyan halmazzt, ahol invertálható, adja meg az inverzét! (12 p)
2. Határozza meg az alábbi határértékeket!
  - a) Vizsgálja az  $\frac{a^n}{1+a^n}$  sorozat ( $a \neq -1$ ) konvergenciáját!
  - b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ ; (9 p + 6 p + 6 p)
  - c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}$ .
3. Adja meg az alábbi hatványsor konvergencia-intervallumát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n n^3}. \quad (12 \text{ p})$$

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 45 p

**B) Definíciók, tételek**

1. Mondja ki a számsorozatok korlátossága és konvergenciája kapcsolatára vonatkozó tételt! (4 p)
2. Hogy szól a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritérium? (4 p)
3. Adja meg a mértani sor definícióját! Mondja ki a mértani sor konvergenciájára vonatkozó tételt! (4 p)
4. Adja meg annak a definícióját, hogy egy  $f_n$  függvénysorozat egyenletesen konvergál  $f$ -hez egy  $I$  intervallumon! (4 p)
5. Adja meg annak a definícióját, hogy egy  $f$  függvény az  $x_0$  pontban folytonos (mindkét definíciót adja meg)! (4 p)
6. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságára vonatkozó tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) 24 p

**C) Elméleti kérdések**

1. Adjon meg olyan számsorozatot, amely korlátos, de nem konvergens! (3 p)
2. Igaz-e, hogy ha egy függvény folytonos a  $(0, 1)$ -en, akkor felveszi maximumát ezen az intervallumon? (4 p)
3. Adjon meg olyan függvényt, amely a  $[0; 1]$ -on rendelkezik a  $B - D$  tulajdonsággal, mégsem folytonos ezen az intervallumon! (7 p)

4. Legyen  $x_1 = 1, x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ . Konvergens-e az  $x_n$  sorozat?

(7 p)

21 p

$\Sigma$  90 p

**Jó munkát!**

33  $\rightarrow$  2

47  $\rightarrow$  3

61  $\rightarrow$  4

75  $\rightarrow$  5