

**Vizsgadolgozat**  
(Mat. alapszak)  
(Differenciál és integrálszámítás, emelt szint)

Név:.....

**A) Feladatok**

1. Határozza meg a következő integrálokat:

$$\text{a) } \int \ln^3 x \, dx; \quad \text{b) } \int \frac{1}{\sin^6 x} \, dx \quad (6 \text{ p} + 8 \text{ p})$$

2. Határozza meg az  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$  függvény Taylor-sorát! Adja meg a konvergencia-sugarat is! (10 p)

3. Határozza meg az  $y^2 = x(x-1)^2$  egyenletű görbe által határolt korlátos zárt síkrész területét! (7 p)

4. Számolja ki a következő határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x} \quad (6 \text{ p})$$

5. Végezze el az  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  függvény teljes vizsgálatát! (8 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

**B) Definíciók, tételek**

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  helyen lokális (helyi) minimuma van? (4 p)

2. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  és  $g$  függvények lineárisan függőek az  $(a, b)$  intervallumon? (4 p)

3. Mondja ki az inverzfüggvény deriválhatóságáról szóló tételt! (4 p)

4. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) integrálkritériumot! (4 p)

5. Definiálja a Darboux-féle alsó- és felső közelítő összeg, valamint az alsó- és felső integrál fogalmát! (4 p)

6. Mondja ki a Taylor-formuláról szóló tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

**C) Elméleti kérdések**

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban) az oszcillációs kritériumban levő " $\forall \varepsilon (> 0)$ -hoz..." kezdetű állítás tagadását! (3 p)

2. Van-e olyan  $f$  és  $g$  függvénypár, amelyek sehol sem deriválhatók, de  $f(g)$  összetételük mindenütt deriválható? (4 p)

3. Adjon meg olyan függvényt, amely folytonos a  $(0, 1)$  intervallumon és ennek az intervallumnak végtelen sok pontjában nem differenciálható! (7 p)

4. Tegyük fel, hogy  $f$  Riemann-integrálható a  $[-1, 1]$  intervallumon és legyen  $I(x) := \int_1^x f(t) \, dt$ . Igaz-e, hogy  $I(x)$  differenciálható a 0 pontban és  $I'(0) = f(0)$ ? (7 p)

**21 p**

$\Sigma$  **90 p**

**Jó munkát!**