

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
(Differenciál és integrálszámítás, emelt szint)

Név:.....

A) Feladatok

1. Határozza meg a következő integrálokat!

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx; \quad \text{b) } \int x \cos^2 x dx; \quad \text{c) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} \quad (6+5+6\text{p})$$

2. Vizsgálja az $f(x) := \arcsin(\sin x)$ függvény differenciálhatóságát, adja meg a deriváltat! (8 p)
3. Számolja ki a következő határértéket!

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} \quad (8 \text{ p})$$

4. Végezze el az

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$$

függvény teljes vizsgálatát!

(Legalább 12 pontot el kell érni!) 12 p
45 p

B) Definíciók, tételek

1. Mondja ki az összetett függvény differenciálására vonatkozó tételt! (4 p)
2. Mondjaki a hatványsorok differenciálására vonatkozó tételt! (4 p)
3. Mit jelent az, hogy a derivált függvény rendelkezik a Bolzano—Darboux-féle tulajdonsággal? (4 p)
4. Mondja ki a Newton—Leibniz féle formulát! (4 p)
5. Definiálja az improprius integrál fogalmát (elég a jobboldali alapeset). (4 p)
6. Hogyan számolható ki egy görbeív hossza az integrál segítségével? (Ügyeljen a feltételekre!) (4 p)
- (Legalább 14 pontot el kell érni!) 4 p
24 p

C) Elméleti kérdések

1. Adjunk meg olyan függvényt, amely egy pontban differenciálható, de azon kívül sehol sem folytonos! (3 p)
2. Bizonyítsuk be, hogy ha f' korlátos a $(-\infty; \infty)$ egyenesen, akkor ott f egyenletesen folytonos! (4 p)
3. Legyen f folytonos a $[0, 1]$ -en, és legyen $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$. Igaz-e, hogy az f függvény szükségképpen konstans? (7 p)
4. Igaz-e, hogy ha f és g impropriusan integrálhatók az $[1, \infty)$ -en, akkor az $f \cdot g$ is impropriusan integrálható ezen az intervallumon? (7 p)
- 7 p
21 p

Σ 90 p

Jó munkát!