

**Vizsgadolgozat**  
(Mat. alapszak)  
(Differenciál és integrálszámítás, emelt szint)

Név:.....

**A) Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\text{a) } \int \frac{\cos \ln x}{x} dx; \quad \text{b) } \int \arctg \sqrt{x} dx \quad (4 \text{ p} + 8 \text{ p})$$

2. Számolja ki az  $\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$  integrál értékét! (9 p)  
3. Határozza meg a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n \quad (10 \text{ p})$$

4. Végezze el az  $f(x) := 2x + 2 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$  függvény teljes vizsgálatát! (14 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

**B) Definíciók, tételek**

1. Mondja ki a Taylor-formulára vonatkozó tételt! (4 p)  
2. Mondja ki az oszcillációs kritériumot! (4 p)  
3. Fogalmazza meg az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt! (4 p)  
4. Mit ért azon, hogy egy  $f$  függvénynek egy pontban helyi maximuma van? (4 p)  
5. Mondja ki a differenciálható függvény monoton növekedése és a deriváltja közti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (4 p)  
6. Mondja ki a függvénytörzs integrálásáról szóló tételt! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

**C) Elméleti kérdések**

1. Van-e primitív függvénye a következő függvénynek a  $(-1, 1)$  intervallumon?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \quad (3 \text{ p})$$

2. Igaz-e az alábbi állítás? Ha  $f(x) \geq 0$  az  $[1; \infty)$  intervallumon és létezik (és véges) az  $\int_1^\infty f(x) dx$  integrál, akkor a  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  sor konvergens. (4 p)  
3. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely  $a$  helyen szigorú (helyi) szélsőértéke van, de deriváltja nem vált előjelet  $a$ -ban! (7 p)  
4. Bizonyítsa be, hogy ha egy ötödfokú egyenletnek 5 különböző gyöke van, akkor a deriváltjának pontosan 4 különböző gyöke van! (7 p)

**21 p**

$\Sigma$  **90 p**

**Jó munkát!**