

Vizsgadolgozat
(Mat. alapszak)
(Differenciál és integrálszámítás)
(emelt szint)

Név:.....

A) Feladatok

1. Határozza meg az alábbi integrálokat!

$$\text{a) } \int \operatorname{tg} x \sqrt{\cos 2x} dx; \quad \text{b) } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx \quad (5 \text{ p} + 7 \text{ p})$$

2. Határozza meg az $f(x) := \sin^2 x$ függvény 0 körüli Taylor-sorát, és adja meg a konvergencia-intervallumot! (9 p)
3. Határozza meg a következő határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} \quad (8 \text{ p})$$

4. Végezze el az $f(x) := xe^{-x^2}$ függvény teljes vizsgálatát! (8 p)
5. Határozza meg az $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ integrál értékét! (8 p)

(Legalább 12 pontot el kell érni!) **45 p**

B) Definíciók, tételek

1. Mit ért az alatt, hogy az f függvény szigorúan konkáv az $\langle a, b \rangle$ intervallumon? (4 p)
2. Mit ért az alatt, hogy az f és g függvények lineárisan függők az (a, b) intervallumon? (4 p)
3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú monoton csökkenése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (4 p)
4. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt! (4 p)
5. Definiálja az improprius integrál fogalmát (elég a jobboldali alapeset)! (4 p)
6. Mondja ki a Newton–Leibniz-féle formulát! (4 p)

(Legalább 14 pontot el kell érni!) **24 p**

C) Elméleti kérdések

1. Igaz-e, hogy ha az $f + g$ függvény differenciálható a -ban, akkor az f és a g függvények is differenciálhatók a -ban? (3 p)
2. Konstruáljon olyan függvényt, amelyre valamely pontban egyszer differenciálható, de kétszer nem! (4 p)
3. Legyen p egy legalább másodfokú polinom. Igaz-e, hogy mindig van olyan $\xi \in [-1, 1]$, amelyre $2p'(\xi) > p(1) - p(-1)$ fennáll? (7 p)
4. Az $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről tudjuk, hogy az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál létezik. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$? (7 p)

21 p
 Σ 90 p

Jó munkát!