Beveztés az analízisbe

Gyakorló feladatok az I. dolgozathoz

A) Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $|x-2|>15$;

2) $|x| \leq \sqrt{2}$;

3) $\frac{3}{|x+1|} \geq 1$;

4) $\left|\frac{x-3}{x+3}\right| \geq 3$;

5) $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| < 2$;

6) $|x-3|+|2-x| \leq 2$;

7) $|7-x|-|x-1| \geq 3$.

B) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x^2) > -1$;

3) $1 < 2^{\frac{x-2}{1-x}} \leq 2$;

4) $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2x$;

5) $0 \leq \log_a \sin x, a > 0, a \neq 1$;

6) $\log_4 \frac{x+3}{x-3} < \frac{1}{4}$;

7) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+4x}{2x-3} \geq 1$;

8) $5 - \left|\frac{5^x}{5-5^x}\right| \geq 0$;

9) $0 \leq \frac{x^2-5x+4}{x^2+6x-7} < 1$.

C) Bizonyítsuk be a következő relációkat:

1) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

2) $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5) $1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$

6) $n^{n+1} > (n+1)^n, n \geq 3$

7) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

8) $2,009^n \geq n+1$

D) Vizsgálja a következő sorozatokat *monotonitás és korlátosság* szempontjából. A $^{*)}$-gal jelölt feladatoknál határozza meg a sorozat *felső és alsó határát is*!

1)* $\frac{4n+3}{5n+4}$; 2)* $\frac{5n+7}{9n+5}$; 3)* $\frac{n+2}{5n^2+2}$;

4) $n^2+\frac{1}{n}$; 5) $n^2-\frac{1}{n^2}$; 6) $\frac{3n^2+2}{n+7}$;

7) $\frac{2n^2+3}{2n^2+n+21}$; 8) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{10}$; 9)* $\frac{n^2+1}{n^2}$;

10)* $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; 11) $\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}$; 12)* $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

13) $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; 14) $\frac{n!}{n^2}$; 15) $(-1)^n n^3$;

16) $\sqrt{n^2+2009}-n$; 17) $\frac{2^n}{n!}$; 18) $\frac{n!}{3^n}$;

19) $\frac{2^n+3^n}{n}$; 20)* $\frac{(-1)^n}{n}$; 21)* $\frac{n}{n+1}$;

22) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$;

23) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$;

24) $x_{n+1}=\frac{x_n}{3}+4$, ahol $x_1=1$; $x_1=3$;

25) $x_{n+1}=\frac{x_n}{4}+3$, ahol $x_1=2$; $x_1=4$; $x_1=5$;

26) $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$, ahol $x_1=1$; $x_1=3$.

E) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét a definíció segítségével (*adjon ε-hoz ν küszöbszám*ot)

1) $a_n=\frac{2n+4}{5n-3}$; 2) $a_n=\frac{2n-1}{n^2+1}$;

3) $a_n=\frac{2n-1}{2-3n}$; 4) $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$;

5) $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 6) $a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{10}$;

7) $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; 8) $a_n=\frac{2n^2-3n}{2n^2-n-21}$;

9) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; 10) $a_n=\frac{n^3}{2^n}$;

11) $a_n=\sqrt[n]{2}$; 12) $a_n=\sqrt[n]{n}$;

13) $a_n=\frac{3^n}{n!}$; 14) $a_n=\frac{1}{3^n+n}$;

15) $a_n=\frac{1}{4^n}$; 16) $a_n=(1+\sqrt[n]{2})^2$;

17) $a_n=\frac{1+\sqrt[n]{2}}{1+\sqrt[n]{2n}}$; 18) $a_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$;

19) $a_n=(0,99+\frac{1}{n})^n$.