

## Bevezetés az analízisbe

### Gyakorló feladatok

(a nov. 28–dec. 12-iki előadásokhoz, ill. gyakorlatokhoz)  
(vizsga-mintapéldák)

A) Állapítsa meg a következő függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és vizsgálja, hogy hol folytonosak?

1)  $f(x) = \sqrt{(2x-3)(4x-7)}$ ;

2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_5 \frac{4x-1}{3-2x}}}$ ;

3)  $f(x) = \sqrt{\log \sin x} + \log(3-x^2)$ ;

4)  $f(x) = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+4x}{2x-3}}$ ;

5)  $f(x) = \sqrt{\frac{\log^2 x + \log x + 6}{\log x}}$ ;

6)  $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x-5|}$ ;

7)  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}[\arcsin(x+3-|x+2|)]}$ ;

8)  $f(x) = \sqrt{2 \log(x+1) - \log x}$ ;

9)  $f(x) = \log \sqrt{\sin x}$ ;

10)  $f(x) = \sqrt{-2 + |x^2 - 2|}$ ;

11)  $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ ;

12)  $f(x) = \sqrt{5 - \left| \frac{5^x}{5-5^x} \right|}$ ;

13)  $f(x) = \log(1 - \log_8(x^2 - 4x + 3))$ ;

14)  $f(x) = \log \log \left( 3 - \left| \frac{1}{(x-2)^4} - 2 \right| \right)$ ;

15)  $f(x) = \sqrt{\log(x - |x+1|) - 2} + \arcsin(\log_2(x^2 - 1))$ ;

16)  $f(x) = \sqrt{2 \log(x-3) - 2 \log(x-5)}$ ;

17)  $f(x) = \sqrt{2 \log(2-x) + \log \frac{1}{x}}$ ;

B) Hol *folytonosak* a következő függvények?

1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x \leq 1; \end{cases}$$

4)

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{ha } x < -1 \\ 2^x, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x^2, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

C) *Inverz függvénnnyel kapcsolatos feladatok.*

Milyen  $x$ -ekre igaz, hogy  $f(x)$  függvény inverze  $\bar{f}(x)$ ? Adja meg  $\bar{f}$  értelmezési tartományát és értékkészletét is!

- 1)  $f(x) = x^2, \bar{f}(x) = \sqrt{x};$  2)  $f(x) = \sqrt{x}, \bar{f}(x) = x^2;$   
 3)  $f(x) = x^2, \bar{f}(x) = -\sqrt{x};$  4)  $f(x) = -\sqrt{x}, \bar{f}(x) = x^2;$   
 5)  $f(x) = x^2 + 3x - 1, \bar{f}(x) = \frac{-3 - \sqrt{13+4x}}{2};$   
 6)  $f(x) = \frac{-3 + \sqrt{13+4x}}{2}, \bar{f}(x) = x^2 + 3x - 1;$   
 7)

$$f(x) = x^2, \bar{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -\sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

8)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -\sqrt{x}, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases} \bar{f}(x) = x^2;$$

9)

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 3x, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ \frac{x}{3}, & \text{ha } x \text{ irracionális;} \end{cases}$$

10)  $f(x) = \sin^2 x, \bar{f}(x) = \sqrt{\arcsin x};$

Adja meg a következő függvények inverzeit, azok értelmezési tartományát, értékkészletét, és vázolja az  $y = \bar{f}(x)$  grafikont is.

- 11)  $x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x};$  12)  $x \mapsto \frac{5 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x};$  13)  $x \mapsto 2^{\frac{x-2}{1-x}};$   
 14)  $x \mapsto \frac{1}{1 - 2 \operatorname{tg} x};$  15)  $x \mapsto \log_{1/3} \frac{x+3}{x-2};$   
 16)  $x \mapsto \sqrt{\frac{9-3x}{x-2}};$  17)  $x \mapsto \frac{2^x + 3^{-x}}{2^x - 3^{-x}};$   
 18)  $x \mapsto \sqrt{(2x-3)(4x-7)};$  19)  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\log_5 \frac{4x-1}{3-2x}}};$   
 20)  $x \mapsto \sqrt{|x-2| - |x-5|};$  21)  $x \mapsto \sqrt{2 \log_3(x-3) - 2 \log_3(x-5)}.$

D) *Egyenletes folytonossággal kapcsolatos feladatok.*

Bizonyítsuk be, hogy

- 1)  $f(x) = \sqrt{x}$  egyenletesen folytonos az  $[1; \infty)$ -n;  
 2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  egyenletesen folytonos a  $[0, \infty)$ -n;  
 3)  $f(x) = \log x$  egyenletesen folytonos az  $[1; \infty)$ -n;  
 4)  $f(x) = \sin x$  egyenletesen folytonos a  $(-\infty, \infty)$ -n;  
 5)  $f(x) = \cos^2 x$  egyenletesen folytonos a  $(-\infty, \infty)$ -n;

- 6) ha  $f(x)$  folytonos a  $(-\infty, \infty)$ -n és periodikus, akkor egyenletesen is folytonos a  $(-\infty, \infty)$ -n.

Állapítsuk meg, hogy az  $f(x) = e^x$  függvény egyenletesen folytonos-e a következő  $I$  intervallumokon:

- 1)  $I = [1, \infty)$ ;      2)  $I = (-\infty, 0]$ ;  
 3)  $I = [3, 10]$ ;      4)  $I = [1, 2)$ ;      5)  $I = (-3, -1)$ .

E) Függvények *határértékével* kapcsolatos feladatok:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ ;      2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$ ;  
 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ ;      4)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$ ;  
 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ ;      6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt[3]{2+x+x}}$ ;  
 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ;      8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ;  
 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ;      10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;  
 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$ ;      12)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$ ;  
 13)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ ;      14)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ ;  
 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x - 1}}{x^2}$ ;      16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ ;  
 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ ;      18)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x+7} \right)^{x+3}$ ;  
 19)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{3x+7} \right)^{x+1}$ ;      20)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^x$ ;  
 21)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin \frac{1}{x}}$ ;      22)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ ;  
 23)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ ;      24)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{m} \right)^m$ ;  
 25)  $n \sin \frac{1}{n}$ ;      26)  $\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{1}{n}$ ;      27)  $n^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right)$ ;  
 28)  $\frac{\sin \frac{4}{n}}{\sin \frac{3}{n}}$ ;      29)  $\sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$ ;      30)  $n^{\sin \frac{1}{n}}$ ;  
 31)  $\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}$ ;      32)  $n - \frac{1}{\sin \frac{1}{n}}$ ;

F) *Ábrázolja* az alábbi függvények grafikonjait:

1.  $x \mapsto \arcsin(\sin x)$ ;  $x \mapsto \sin(\arcsin x)$ ;
2.  $x \mapsto \arccos(\cos x)$ ;  $x \mapsto \cos(\arccos x)$ ;
3.  $x \mapsto \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ;  $x \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ ;
4.  $x \mapsto \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x)$ ;  $x \mapsto \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)$ .
5.  $x \mapsto \sqrt{x^2}$ ;  $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ ;
6.  $x \mapsto \frac{3-x}{x+5} = f(x)$ ;  $y = \overline{f}(x)$ ;
7.  $x \mapsto \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} = f(x)$ ;  $y = \overline{f}(x)$ .