Bevezetés az analízisbe

Gyakorló feladatok az október 21-iki dolgozathoz

A) Vizsgálja $+\infty$, ill. $-\infty$ *divergencia szempontjából* a következő sorozatokat! (Adjon M-hez ν küszöbszámot!)

1) $5n^3 - 3n^2 + 2n + 1$;
2) $2^{\sqrt{n-1}}$;
3) n^n;
4) $\sqrt[n]{n!}$;
5) $\frac{n^2}{\lg(n+1)}$;
6) $\frac{1}{\lg(n+1) - \lg n}$.
7) $a_n = -n^2 + 3n + 5$;
8) $a_n = \frac{n^2+3n+7}{-n+5}$.

B) Határozza meg a *következő sorozatok határértékét* (ha nincs határérték, akkor *vizsgálja* meg a ∞-*divergenciát!)*

1) $\frac{n}{3n+2}$;
2) $\frac{(n+4)^3 - n(n+6)^2}{n^3}$;
3) $\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}$;
4) $\frac{n(n+1)}{n^2+1}$;
5) $\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2}$;
6) $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;
7) $\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$;
8) $\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$;
9) $n - \frac{3}{\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$;
10) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
11) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;
12) $\frac{a^n}{1+a^n}$
13) $\sqrt{an^2+bn+2} - n$;
14) $\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{(n-1)(n-2)}$;
15) $\sqrt[3]{n^3+n^2+2008} - n$;
16) $\frac{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$;
17) $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$;
18) $\frac{n}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}$;
19) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}$;
20) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$;
21) $\frac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$;
22) $\frac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{(\sqrt[n]{2}-1)^2}$;
23) $\frac{16\sqrt[n]{n^4}-24\sqrt[n]{n^2}+8}{16\sqrt[n]{n^4}-20\sqrt[n]{n^2}+4}$;
24) $\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$;
25) $\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$;
26) $\frac{\sqrt[n]{a^m}-1}{\sqrt[n]{a^k}-1}$ $\quad (a > 1)$;
27) $\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}$;
28) $\sqrt[n]{n+1}$;
29) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;
30) $\frac{n^\alpha}{n!}$;
31) $\sqrt[n]{n^3+3n}$;
32) $\sqrt[n]{n^3-3n+1}$;
33) $\sqrt[2n]{n^2-16}$;
34) $\sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^3-3}}$;
35) $\sqrt[n]{\frac{n^2-5n+3}{n^5+1}}$;
36) $\sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$;
37) $\sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{n-2n^3-n^4}{1-n^2}}$;
38) $\sqrt[n^2]{\frac{n+1}{n-1}} + \sqrt[n^2]{5n^2+2}$;
39) $\sqrt[n+2]{\frac{n^2+2n-3}{n}}$;
40) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$;
41) $\sqrt[n]{\pi^n+2^n+3,2^n}$;
42) $\sqrt[2n]{3\cdot 5^n+2\cdot 3^{2n}}$;

43) $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$; 44) $\sqrt[n]{1 + 2^n - 4^n + 5^n}$;

45) $\sqrt[n+2]{4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n + 5^n}$; 46) $\frac{n!}{n^n}$;

47) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}{n}$; 48) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$;

49) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 50) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$;

51) $\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n!}$; 52) $\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n$;

53) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{kn}$; 54) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$;

55) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$; 56) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

57) $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n$; 58) $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n!}$;

59) $\left(\frac{a_1 n + b_1}{a_2 n + b_2}\right)^n$; 60) $a_n = \frac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

61) $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$;

62) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)$;

63) $a_n = \frac{1+\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+nn!}{n^n}$;

64) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

65) $a_n = x + a_{n-1}^2, \quad (a_0 = 0)$;

66) $a_n = \frac{x}{1+a_{n-1}}, \quad (a_0 = 0)$;

67) $a_n = \sqrt{x + a_{n-1}}, \quad (a_0 = 0)$;

68) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad (a_0 = 1)$.

C) *Határozza* meg a következő sorozatok *torlódási pontjait!*

1) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$;

2) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$;

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$;

4) $\left\{\frac{(3+(-1)^n 2)n+1}{(3+(-1)^n)n+1}\right\}$;

5) $\left\{\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n\right\}$;

6) $\left\{1 + (-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n}\right\}$;

7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$.

D) *Határozza* meg a következő *sorok összegét!*

Analízis II. Feladatgyűjteményből (Bagota-Németh J.-Németh Z.): 418, 422-428.

E) *Konvergensek-e az alábbi sorok?*

Analízis II. Feladatgyűjteményből (Bagota-Németh J.-Németh Z.): 437-442, 450-457, 466-471, 473-474, 477-478, 480-481, 485, 487-489.