VII. Akarol 7/1

(102) Számoljuk ki az alábbi Laplace-transzformáltakat,

$f(t)$	$F(p)$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$n!/p^{n+1}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n g(t)$	$(-1)^n \frac{d^n G}{dp^n}$
$g(at)$	$\frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right)$
$e^{at} g(t)$	$G(p-a)$
te^{-t}	$\frac{1}{(p+1)^2}$
$e^{at} t^n$	$n!/(p-a)^{n+1}$
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$u(t-a)$	e^{-ap}/p
$u(t-a)g(t-a)$	$e^{-ap}G(p)$
$g^{(n)}(t)$	$p^n G(p) - p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0)$
$g''(t)$	$p^2 G(p) - p\,g(0) - g'(0)$
$g'(t)$	$p\,G(p) - g(0)$
$\int_0^t g(u)\,du$	$G(p)/p$

itt $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$

$f(t)$	$F(p)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$

(103) Igazoljuk az alábbi összefüggéseket:

a) Ha $f(t) = \frac{1}{t} g'(t)$, akkor $F(p) = \int_p^\infty q\, G(q)\, dq$

b) Ha $f(t) = \int_0^t \frac{g(u)}{u}\, du$, akkor $F(p) = \frac{1}{p} \int_p^\infty G(q)\, dq$

c) Ha $f(t) = \int_t^\infty \frac{g(u)}{u}\, du$, akkor $F(p) = \frac{1}{p} \int_0^p G(q)\, dq$

d) $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty F(p)\, dp$

(104) Határozzuk meg az alábbi fv-ek L-transzformáltjait:

$\operatorname{sh}(at)$, $\operatorname{ch}(at)$, $\cos(at)\operatorname{ch}(bt)$, $\frac{\operatorname{sh} at}{t}$, $\sin(a\sqrt{t})$,

$\sqrt{t}\cos(a\sqrt{t})$, $t^b\cos(at)$ $(b>-1)$

(105) $\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t}\, dt = ?$ $\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right) dt = ?$ $(a,b>0)$

(106) Oldjuk meg L-trafóval a de-eket:

a) $y' + y = 1$, $y(0) = 2$

b) $y'' + \omega^2 y = \cos \nu t$, $\nu \neq \omega$

c) $y'' + 4y' + 8y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$

d) $y''' + y = 1$ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

e) $y''' + y = t$ 〃

f) $y' - z = -t^2$, $y - z' = 2te^{-t}$

g) $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$

h) $y' + y = \sin 3t$ $y(0) = 0$

i) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

7/3

j) $y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(u)\,du = u(t)$ $\left(= \begin{cases} 1, & \text{ha } t \geq 0 \\ 0 & \text{kül} \end{cases}\right)$

k) $x' + x + 4y = 10, \quad x - y' - y = 0, \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 3$

107) Egy részecskét kilövünk a Föld felszínén adott pontból. A mozgásegyenletek

$$x'' = 2\omega\,(y' \sin\lambda - z' \cos\lambda)$$

$$y'' = -2\omega\, x' \sin\lambda$$

$$z'' = g + 2\omega x' \cos\lambda,$$ ahol λ a földrajzi szélesség és ω a Föld szögsebessége; az x tengely keletre, az y tengely északra, a z tengely a középpont felé mutat. Adjuk meg a megoldást, az $x'(0)$, $y'(0)$, $z'(0)$ kezdősebességektől függően!