# VI.

Alkanal 6/1

(87) Igazoljuk a Fourier-transzformáció alábbi tulajdonságait

a) $f(at) \longmapsto \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

b) $f(t-a) \longmapsto e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$

c) $e^{iat}f(t) \longmapsto \hat{f}(\omega-a)$

d) $(\cos at)\, f(t) \longmapsto \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega-a)+\hat{f}(\omega+a)\right)$

e) $\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\hat{g}(t)\, dt \quad (f,g\in L)$

f) $f^{(k)}(t) \to (i\omega)^k\hat{f}(\omega)$
(feltéve, hogy $f$ absz. folyt. minden $[a,b]$-n, $f^{(n)}\in L$, és $f^{(n)}$ eltűnik $\pm\infty$-ban $(n=0,1,2,\dots k)$ )

g) $-itf(t) \longmapsto \frac{d\hat{f}}{d\omega}$ (feltéve, hogy $f(t)$, $t\cdot f(t)\in L$)

h) $g(t) := \int_{-\infty}^{t} \cancel{f(x)dx}\, f(x)dx \longmapsto \frac{\hat{f}(\omega)}{i\omega}$, $\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt$
(feltéve, hogy $f,\ tf\in L$ és $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$ )

(88) Határozzuk meg az alábbi fv-ek F-transzformáltját

$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & t\ge 0 \quad (a>0) \\ 0 & \text{külö.} \end{cases}$ $\qquad f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } |t|\le a \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$

$f(t) := \begin{cases} 1-|t|, & \text{ha } |t|\le 1 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$ $\qquad f(t) := e^{-a|t|} \quad (a>0)$

$f(t) := \begin{cases} 1-t^2 & t\ge 0, \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$ $\qquad f(t) := \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ -1 & -1<t<0 \\ 0 & \text{kül} \end{cases}$

(89) Biz. $f$ valós értékű $\Leftrightarrow \hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$

(90) Biz. az alábbi tételt,
Ha $f$ holomorf az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkon, kivéve a $z_1, \dots, z_n$ pólusokat; $f$ holomorf a valós egyenesen, kivéve az $r_1, \dots, r_m$ pólusokat; a felső félsíkon $f(z) \le \frac{M}{|z|^k}$, ha $|z| > R_0$. Ekkor

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{iz\omega}, z_k\right) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{iz\omega}, r_k\right).$$

Biz. az alsó félsíkra vonatkozó tételt is!

(91) Biz. $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$ $a>0$ $\longmapsto$ $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$

$f(t) = \frac{1}{t^2-2t+2} \longmapsto ?$ Mi a F-transzformált?

$f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2} \longmapsto ?$

(92) $f, g \in L$ esetén legyen $(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx$ (konvolúció). Biz $\|f * g\|_{L_1} = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$

Biz. $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$! Számoljuk ki az $f * \mathbb{1}_a$ és $f * u$ fv-eket, ahol $\mathbb{1}_a(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| \le a \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$, $u(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \ge 0 \\ 0 & \text{kül.} \end{cases}$

(93) Vezessük le az inverziós formula alábbi alakját:

$$(*) \quad f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t \, d\omega,$$

ahol $a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt$, $b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt$

$(*)$-ban a $\int_0^{\infty}$ integrál $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R$-et jelent.

(94) Az $1_{[-1,1]}$ F-integrál előállításából vezessük le, hogy
$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} \pi/2 & \text{ha } |t|<1 \\ \pi/4 & \text{ha } t=\pm 1 \\ 0 & \text{ha } |t|>1. \end{cases}$$

(95) Az $e^{-t}u(t)$ előállításából,
$$\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t+\cos\omega t}{1+\omega^2}\,d\omega = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \pi/2 & t=0 \\ \pi/e & t>0 \end{cases}$$

(96) Az $e^{-a|t|}$ $a>0$ előállításából,
$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2a}e^{-at} \quad (t>0)$$

(97) $f(t) := \begin{cases} -2 & -1 \le t \le 0 \\ 1 & 0<t<1 \\ 0 & |t|\ge 1 \end{cases}$ előállításából, $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$

(98) Legyen $f\in L_1(\mathbb{R}^+)$ esetén $\hat{f}_c(\omega) := \int_0^\infty f(t)\cos\omega t\,dt$ és $\hat{f}_s(\omega) = \int_0^\infty f(t)\sin\omega t\,dt$ (Cosinus, sinus transzformáció)

Vezessük le 87 a)–d) analogonjait!

(99) Biz. $F_c: f'' \longmapsto -\omega^2\hat{f}_c(\omega) - f'(0)$

$f^{IV} \longmapsto$ ?? Mi a transzformált?

(feltéve, hogy a deriváltak léteznek, $L_1$-beliek és eltűnnek a $+\infty$-ben)

Biz.
$$F_c\left(\int_t^\infty f(u)\,du\right) = \frac{1}{\omega}\hat{f}_s(\omega)$$
$$F_s\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{\omega}\hat{f}_c(\omega)$$

($F_c$, $F_s$ a cos, ill. sin transzformált.)

(100) Biz. a Parseval-formula alábbi alakját:
Ha $f \in L_1 \cap L_2(\mathbb{R})$, akkor $\hat{f} \in L_2$ és $\|f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L_2}$ 

(101) Vezessük le:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^2 dw = \pi, \quad \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin w}{w}\right)^4 dw = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty}\frac{dw}{(1+w^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

(rendre $\mathbb{1}_{[-1,1]}$, $(1-|t|)\mathbb{1}_{[-1,1]}$, $e^{-|t|}$ transzformáltjából.)