61) Fejtsük Fourier-sorba!

a) $f(t):=\begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi \le t < 0 \\ 1, & \text{ha } 0 \le t < \pi \end{cases}$ b) $f(t):=\begin{cases} -1 & -\pi \le t < 0 \\ 1 & 0 \le t < \pi \end{cases}$

c) $f(t):=|t| \quad -\pi \le t \le \pi$ d) $f(t):=t \quad -\pi \le t < \pi$

e) $f(t)=t^2 \quad 0 \le t \le 2\pi$ f) $f(t):=\frac{1}{12}(\pi^2 t - t^3) \quad -\pi \le t < \pi$

62) Mik a F-sor formulák $[-\pi,\pi)$ helyett $[-p,p)$-n?

63) Fejtsük F-sorba, a) $f(t):=\begin{cases} -6-t, & -6 \le t \le -3 \\ t, & -3 \le t \le 3 \\ 6-t, & 3 \le t \le 6 \end{cases}$

b) $f(t):=\begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$

c) $f(t):=\begin{cases} 2n-t-\frac{1}{2} & 2n-1 \le t \le 2n \\ t-2n-\frac{1}{2} & 2n \le t \le 2n+1 \end{cases}$

64) Biz. $\{\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \dots\}$ egy teljes ONR a $[0,\frac{\pi}{2}]$-n! $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$ és $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ is teljes ONR $[0,\pi]$-n!

65. $f(t) := \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$

Fejtsük a) tiszta sinus; b) tiszta cosinus sorba!

66. a) $f(t) := \sin t,\ 0 \le t \le \pi$ cosinus-sora?

b) $f(t) := t^2 \quad 0 \le t \le p$ cosinus-sora?

c) $f(t) := K \quad 0 \le t \le p$ sinus-sora?

d) $f(t) := t \quad 0 \le t \le 2$ sinus, ill. cosinus-sora?

67. Az a $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ sort írjuk $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ alakba! Mi a kapcsolat a_n, b_n, c_n között?

68. A fenti sort írjuk $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_n \cos(nt + \varphi_n)$ alakba! Mi a kapcsolat? (a_n, b_n, d_n, φ_n között).

69. $f(t)$ F-sorát ismerjük. Mi a F-sora $f(ct)$-nek?

70. $f = f_e + f_o$, ahol f_e páros és f_o páratlan fv.

(~~$f_e(t)$~~ $\left(f_e(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2}\right)$ Biz.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_e^2 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_o^2$$

Értelmezzük ezt, mint egy Pitagorasz-tételt!

(71) f és g F-sorát ismerjük. Mi $f \cdot g$ F-sora?
(Ha $f, g \in L^2$, $f \cdot g \in L$)

(72) Alkalmazzuk a Parseval-formulát:
a) $f(t) := \frac{x-\pi}{2}$ $(0 \le x < 2\pi)$ b) $f(t) := t^2$ $(0 \le t < 2\pi)$

(73) Biz. Ha f L-integrálható $[a,b]$-n $(-\infty \le a < b \le \infty)$
és h korlátos mérhető fv, amelyre $\frac{1}{c}\int_0^c h(t)\,dt \to 0$
$(c \to \pm\infty)$, akkor $\int_a^b f(t)\,h(\omega t)\,dt \to 0$ $(\omega \to \infty)$.

(74) Lokális Lipschitz feltétel: $\exists K > 0$, $\exists \alpha > 0$
az 'a' pont egy környezetében $|f(x) - f(a)| \le K|x-a|^\alpha$
Biz. f diff.ható a-ban $\Rightarrow$ Lip 1
mindkét féloldal. diff.ható $\Rightarrow$ Lip 1
Lip α $\Rightarrow$ folytonos
$\alpha < \beta$ ~~Lip $\beta \Rightarrow$ Lip α~~ Lip $\beta \Rightarrow$ Lip α
$\alpha > 1$ Lip $\alpha \Rightarrow$?
(ezek nem megfordítható állítások)

(75) Hol konvergensek a 61, 63, 66-ban kapott sorok? Vezessünk le ebből $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$
és hasonló állításokat!

(76) Legyen $D_n(t) := 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt$, $D_n(0) = 1$

Biz. $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}$ (Dirichlet mag)

Legyen $\Phi_\omega(t) := (\sin \omega t)/t$ $\Phi_\omega(0) = \omega$ (Fouriermag)

Biz. $\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \pi$, $\int_0^\infty \Phi_\omega(t) = \frac{\pi}{2}$, de

egyik integrál sem abszolút konvergens!

(77) Legyen $\chi_0^0(x) = 1$ és $\chi_n^k(x) := \begin{cases} \sqrt{2^n}, \text{ ha } \frac{k-1}{2^n} \le x < \frac{k-1/2}{2^n} \\ -\sqrt{2^n}, \text{ ha } \frac{k-1/2}{2^n} < x < \frac{k}{2^n} \\ 0 \text{ kül} \end{cases}$

(itt $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $k = 1, 2, \ldots 2^n$)

Biz. Ez a rendszer (Haar-rsz) ortogonális és teljes $[0,1]$-en.

(78) Számoljuk ki: $\int_0^1 D_n(x,t)\,dt$, ahol

$D_n(x,t) = \sum \varphi_k(x)\varphi_k(t)$ a Dirichlet-mag, és

(φ_n) a Haar-rsz.

(79) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$

Biz. a) a megoldásod hatványsor alakjában $c_{k+2}=\frac{(k+1)k-(n+1)n}{(k+2)(k+1)}c_k$

b) $P_n(x):=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ n-edf. polinom megoldás

c) $(n+1)P_{n+1}=(2n+1)xP_n-nP_{n-1}$

d) $P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n$

e) (P_n) ONR $(-1,1)$-en, $\int_{-1}^{1}P_n^2=\frac{2}{2n+1}$

(80) $x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0$

Biz a) a megoldásod hatványsor alakjában $c_{k+1}=c_k\frac{k-n}{(k+1)^2}$

b) $L_n(x):=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$ n-edf. polinom mo.

c) $(n+1)L_{n+1}-(2n+1-x)L_n+nL_{n-1}=0$

d) (L_n) ONR $[0,\infty)$-en az e^{-x} súlyra

(81) $\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2ny=0$

Biz. a) $H_n(x):=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ n-edf. polinom mo.

b) $H_{n+1}=-2nH_{n-1}-2xH_n$

c) (H_n) ONR $\mathbb{R}$-en az e^{-x^2} súlyra

(82) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$

Biz a) $T_n := \cos(n \arccos x)$ n-edf. polinom mo.

b) $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$

c) $\tilde{U}_n := \sin(n \arccos x)$ is mo.

d) $T_n, \tilde{U}_n$ lin. független

e) $U_n := \frac{\tilde{U}_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ egy n-edf. polinom

f) $U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1}$

g) $[-1,1]$-en (T_n) az $(1-x^2)^{-1/2}$ súlyra,

(U_n) pedig az $(1-x^2)^{1/2}$ súlyra ONR.