(301) Legyen $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

a) $\nabla\varphi = ?$ $\varphi = \ln r$; $\varphi = \frac{1}{r}$

b) $\Delta(\ln r) = ?$ $\nabla(r^3\vec{r}) = ?$ $\nabla\left(r\nabla\frac{1}{r^3}\right) = ?$

$\Delta\left(\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right) = ?$ $\nabla\times(\vec{r}\cdot f(r)) = ?$ (f sima fv.)

c) Bizonyítsa: – $\nabla r^n = n\cdot r^{n-2}\vec{r}$

– $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

– $\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$

(302) Biz $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$ (f sima fv)

Milyen f fv. esetén lesz $\Delta f(r) = 0$?

(303) Adja meg:

– az $-x^2yz^2 + 2xy^2z = 1$ felület $(1,1,1)$ pontbeli normális egységvektorát

– az $x^2yz - 4xyz^2 = -6$ felület $(1,2,1)$ pontbeli érintő síkját

(304) $F, G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Bizonyítsa: ~~$\frac{\partial}{\partial x} F\cdot G = A\cdot \partial R$~~

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{F}\cdot\vec{G} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\cdot\vec{G}$$

305) Legyen $\vec{F}$ olyan $\nabla \times \vec{F} = \underline{0}$ („rotációmentes")

Biz. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\nabla \times \vec{F})$

306) Legyen $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{\omega}$ állandó.

Biz. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$

307) Legyen $\vec{F} = 3y^4z^2\,\underline{i} + 4x^3z^2\,\underline{j} - 3x^2y^2\,\underline{k}$

Biz. $\vec{F}$ „divergenciamentes", azaz $\nabla \cdot \vec{F} = 0$

más néven „szolenoidális"

Milyen $\vec{G}$-re lesz $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$?

308) Legyen $\vec{F} = (2x^2 + 8xy^2z)\,\underline{i} + (3x^3y - 3xy)\,\underline{j} + (-4y^2z^2 - 2x^3z)\,\underline{k}$

Biz. $\vec{F}$ nem szolenoidális, de $\vec{G} = xyz^2\vec{F}$ az!

309) Milyen f ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima) függvény esetén lesz

$F = f(r)\,\vec{r}$ szolenoidális?

310) Biz. $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ rotációmentes. Milyen φ-re lesz

$\vec{E} = \nabla \varphi$?

311) Biz. Ha $\vec{F}$ és $\vec{G}$ rotációmentesek, akkor

$\vec{F} \times \vec{G}$ szolenoidális!

312) Legyenek $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvények

„függvényösszefüggők", ha valamely F sima függvényre $F(u,v) \equiv 0$.

(Például $u(x,y,z) := \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, $v(x,y,z) := \frac{x+y}{1-xy}$,

és $F(u,v) = \operatorname{tg} u - v \equiv 0$)

Biz. u, v függvényösszefüggők $\iff \nabla u \times \nabla v = 0$.

Legyen u, v, w függvényösszefüggők, ha $F(u, v, w) \equiv 0$.

~~Biz.~~ u, v, w fvösszefüggők $\iff \nabla u \cdot (\nabla v \times \nabla w) = 0$.

3.13 Az alábbiakban az S felület a V térfogatot határolja, $\vec{n}$ a kifelé mutató normálvektor.

Bizonyítsa,

a) $\oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, dS = 3|V|$ ($|V|$ a térfogat)

b) $\iiint_V \nabla \varphi \, dV = \oiint_S \vec{n} \varphi \, dS$
(φ, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

c) $\iiint_V (\nabla \times \vec{F}) dV = \oiint_S \vec{n} \times \vec{F} \, dS$
($\vec{F}$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

d) $\nabla \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{n} \cdot \varphi \, dS$

$\nabla \times \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{n} \times \vec{F} \, dS$

általában

$$\nabla \otimes A = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \vec{n} \otimes A \, dS$$

ahol $\otimes$ a 3 lehetséges „szorzás" bármelyike, ha A skalár, szorzás, ha A vektor, lehet skaláris vagy vektoriális szorzás.

$\Delta V \to 0$ úgy értendő, hogy a térfogat, és az átmérő is $\to 0$